RICERCHE

SOPRA DIVERSI PUNTI

CONCERNENTI

L' ANALISI INFINITESIMALE

E

LA SUA APPLICAZIONE

ALLA FISICA

DEL PADRE

DON GREGORIO FONTANA

PUBL. PROF. DI ANALISI SUBLIME
NELLA R. I. UNIVERSITA' DI PAVIA.

Ad uso delle sue Lezioni.





IN PAVIA MDCCXCIII.

Presso Baldassare Comino

Con permissione.

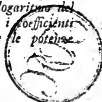


AVVISO AL LETTORE

Queste Ricerche formano parte delle Lezioni di Analisi Sùblime, che ora più, ora meno estesamente spiegar suole l'Autore a' suoi Scolari. L'applicazione dell'Analisi Infinitesimale a varj Problemi interessanti di Fisica è un oggetto principale di tali Lezioni, ed occupa la maggior parte di questo Libretto. Si pubblicano colle stampe questi Articoli per ovviare agli inconvenienti inevitabili della dettatura.

ARTICOLO I.

Sopra il modo di elevare un polinomio qualunque a qualsivoglia potestà; di assegnare il logaritmo del polinomio; e di scoprire la relazione fra i coefficienti de' termini di qualunque equazione, e le potenze delle sue radici.



1. Fra i Geometri, che hanno trattato il Problema di innalzare qualsivoglia dato polinomio $a + bx + cx^2 + \delta x^3 + ex^4 + fx^5 +$ ec. a qualunque potenza n, niuno, ch' io sappia, ha assegnata la legge, con cui progrediscono i coefficienti di ciascun termine della potestà sviluppata, ed il solo Giacopo Bernoulli, che nelle sue miscellanee postume, aggiunte al secondo tomo delle sue Opere N. CIII., maneggia questo Problema, nella seconda soluzione, che egli ne reca, propone la legge de' predetti coefficienti. Ma una tal legge manca di quell' eleganza e semplicità, a cui può essere facilmente ridotta, ed è altronde appoggiata a ripetute integrazioni, che possono comodamente evitarsi.

Ecco pertanto una soluzione semplicissima di un tal Problema, dedotta colla maggior facilità dall' uso il più ovvio del solo Calcolo Differenziale.

Stabilisco l' equazione $(a + bx + cx^2 + \delta x^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{ec.})^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{ec.}$, e cerco la legge de' coefficienti A, B, C ec. Prendo il differenziale logaritmico dell' uno e l' altro membro dell' equazione, e dividendo tutto per dx ottengo



$$\frac{n(b+2cx+3\delta x^2+4ex^3+5fx^4+6gx^5+\text{ec.})}{a+bx+cx^2+\delta x^3+ex^4+fx^5+gx^6+\text{ec.}}=\frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4+6Gx^5+\text{ec.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\text{ec.}}.$$

Ora moltiplico in croce, ed in ambedue i membri dell' equazione ordino i termini secondo le potenze di x, come segue

$$\begin{array}{r}
nbA+2ncAx+3n\delta Ax^2+4neAx^3+5nfAx^4+6ngAx^5\;\ldots\\
+nbBx+2ncBx^2+3n\delta Bx^3+4neBx^4+5nfBx^5\;\ldots\\
+nbCx^2+2ncCx^3+3n\delta Cx^4+4neCx^5\;\ldots\\
+nbDx^3+2ncDx^4+3n\delta Dx^5\;\ldots\\
+nbEx^4+2ncEx^5\;\ldots\\
+nbFx\;\ldots\\
\text{ec.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
=aB+2aCx+3aDx^2+4aEx^3+5aFx^4+6aGx^5\;\ldots\\
+bBx+2bCx^2+3bDx^3+4bEx^4+5bFx^5\;\ldots\\
+cBx^2+2cCx^3+3cDx^4+4cEx^5\;\ldots\\
+\delta Bx^3+2\delta Cx^4+3\delta Dx^5\;\ldots\\
+eBx^4+2eCx^5\;\ldots\\
+fBx^5\;\ldots\\
\text{ec.}
\end{array}$$

Ciò fatto paragono i termini corrispondenti di quest' equazione, cioè quelli, che contengono la medesima potenza di x, e da questo paragone ricavo immediatamente le seguenti determinazioni

1.° $B=\frac{nbA}{a}$.

2.° $C=\frac{2ncA+(n-1)bB}{2a}$.

3.° $D=\frac{3n\delta A+(2n-1)cB+(n-2)bC}{3a}$.

4.° $E=\frac{4neA+(3n-1)\delta B+(2n-2)cC+(n-3)bD}{4a}$.

5.° $F=\frac{5nfA+(4n-1)eB+(3n-2)\delta C+(2n-3)cD+(n-4)bE}{5a}$.

6.° $G=\frac{6ngA+(5n-1)fB+(4n-2)eC+(3n-3)\delta D+(2n-4)cE+(n-5)bF}{6a}$.

ec.

La legge di questi coefficienti indeterminati è delle più semplici ed evidenti, che possano desiderarsi, e basta conoscere il primo A per venire immediatamente in cognizione di tutti gli altri. Il primo poi si determina mediante l'equazione assunta da principio, dalla quale, supposto $x = 0$, si ricava subito $A = a^n$. Dunque ec.

2. Con un procedere affatto simile si converte in una serie ordinata secondo le potenze di x il logaritmo del polinomio $a + bx + cx^2 + \delta x^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 +$ ec. Per ciò assumo l'equazione $\log.(a + bx + cx^2 + \delta x^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{ec.}) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 +$ ec. Il differenziale di essa, diviso per dx mi dà . . . .

$$\frac{b + 2cx + 3\delta x^2 + 4ex^3 + 5fx^4 + 6gx^5 + \text{ec.}}{a + bx + cx^2 + \delta x^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{ec.}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + \text{ec.}$$

Moltiplico ora pel denominatore, ed ordinando i termini relativamente alle potenze di x ritrovo la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
aB + 2aCx + 3aDx^2 + 4aEx^3 + 5aFx^4 + 6aGx^5 \ldots \\
+ bBx + 2bCx^2 + 3bDx^3 + 4bEx^4 + 5bFx^5 \ldots \\
+ cBx^2 + 2cCx^3 + 3cDx^4 + 4cEx^5 \ldots \\
+ \delta Bx^3 + 2\delta Cx^4 + 3\delta Dx^5 \ldots \\
+ eBx^4 + 2eCx^5 \ldots \\
+ fBx^5 \ldots \\
\text{ec.} \\
= b + 2cx + 3\delta x^2 + 4ex^3 + 5fx^4 + 6gx^5 \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il confronto de' termini omologi, ossia contenenti la medesima potenza di x mi dà le seguenti determinazioni

1.° $B = \frac{b}{a}$.

2.° $C = \frac{2c - bB}{2a}$.

3.° $D = \frac{3\delta - 2bC - cB}{3a}$.

4.° $E = \frac{4e - 3bD - 2cC - \delta B}{4a}$.

5.° $F = \frac{5f - 4bE - 3cD - 2\delta C - eB}{5a}$.

6.° $G. = \frac{6g - 5bF - 4cE - 3\delta D - 2eC - fB}{6a}$.

Ritrovo poi il primo coefficiente A, che manca nelle precedenti determinazioni, con fare $x = 0$ nell'equazione da principio supposta, con che mi viene subito $A = \log. a$; e così tutto resta determinato.

3. Con un metodo analogo a questo si può speditamente dimostrare il formoso teorema di Newton intorno alla relazione, che passa fra i coefficienti d'una qualunque equazione, e la somma delle potenze delle radici di detta equazione.

Sia $0 = a - bx + cx^2 - ex^3 + fx^4 - gx^5 + \text{ec.}$ (A) un'equazione di qualsivoglia grado, e le sue radici siano p, q, r, ec., per modo che sia per la teoria delle equazioni $a - bx + cx^2 - ex^3 + \text{ec.}$ $= a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots\ldots (B)$. Dividendo per a nasce $1 - \frac{bx - cx^2 + ex^3 - \text{ec.}}{a}$ $= \left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right) \ldots$. Prendo i logaritmi da una parte e dall'altra, ed ho .... $\log.\left(1 - \frac{bx - cx^2 + ex^3 - \text{ec.}}{a}\right) = \log.\left(1 - \frac{x}{p}\right)$ $+ \log.\left(1 - \frac{x}{q}\right) + \log.\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \text{ec.}$ Ora si sa, che $\log.(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}$ $- \frac{z^5}{5} - \text{ec.}$ Avremo dunque $\log.\left(1 - \frac{x}{p}\right) +$ $\log.\left(1 - \frac{x}{q}\right) + \log.\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \text{ec.} =$ (ordinando i termini secondo le potenze di x)

$$-x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\text{ec.}\right)$$
$$-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}+\text{ec.}\right)$$
$$-\frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}+\text{ec.}\right)$$
ec.

$= log.\left(1-\frac{bx-cx^2+ex^3-\text{ec.}}{a}\right)$. Pongo $-\,log.\left(1-\frac{bx-cx^2+ex^3-\text{ec.}}{a}\right)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{ec.}\ (O)$, e dovendo essere identici i due valori di questo logaritmo, il paragone de' termini omologi dà le equazioni

$$A=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\text{ec.}$$
$$2B=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}+\text{ec.}$$
$$3C=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}+\text{ec.}$$
$$4D=\frac{1}{p^4}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{r^4}+\text{ec.}$$
ec.

Differenziando poi l'equazione assunta (O), e dividendo per dx si ottiene . . . .
$\frac{b-2cx+3ex^2-4fx^3+5gx^4-\text{ec.}}{a-bx+cx^2-ex^3+fx^4-gx^5+\text{ec.}}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+6Fx^5+\text{ec.}$ Moltiplico tutto pel denominatore, ordino i termini secondo le potenze di x, e trovo l'equazione

$$b-2cx+3ex^2-4fx^3+5gx^4-6hx^5+\text{ec.}=$$
$$\begin{array}{llllll} aA & -bAx & +cAx^2 & -eAx^3 & +fAx^4 & -gAx^5 \ \ldots \\ & +2aBx & -2bBx^2 & +2cBx^3 & -2eBx^4 & +2fBx^5 \ \ldots \\ & & +3aCx^2 & -3bCx^3 & +3cCx^4 & -3eCx^5 \ \ldots \\ & & & +4aDx^3 & -4bDx^4 & +4cDx^5 \ \ldots \\ & & & & +5aEx^4 & -5bEx^5 \ \ldots \\ & & & & & +6aFx^5 \ \ldots \end{array}$$

Il paragone de' termini omologi mi presenta le seguenti determinazioni:

1°. $A = \frac{b}{a}$.

2°. $2B = \frac{Ab - 2c}{a}$.

3°. $3C = \frac{2Bb - Ac + 3e}{a}$.

4°. $4D = \frac{3Cb - 2Bc + Ae - 4f}{a}$.

5°. $5E = \frac{4Db - 3Cc + 2Be - Af + 5g}{a}$.

6°. $6F = \frac{5Eb - 4Dc + 3Ce - 2Bf + Ag - 6h}{a}$.

ec.

Per conoscere immantinente, che queste determinazioni sono appunto quelle, che ci offre il teorema di Newton, basta cangiare le radici della proposta equazione (A) nelle sue reciproche con fare $y = \frac{1}{x}$, con che la detta equazione, supposta di grado n, si trasforma in quest' altra $ay^n - by^{n-1} + cy^{n-2} - ey^{n-3} + fy^{n-4} - gy^{n-5} +$ ec. $= 0$, e dividendo per a, $y^n - \frac{b}{a} y^{n-1} + \frac{c}{a} y^{n-2} - \frac{e}{a} y^{n-3} +$ ec. $= 0$, nella quale la somma delle radici sarà $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} +$ ec. $= A$, la somma de' quadrati di quelle sarà $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} +$ ec. $= 2B$, la somma de' cubi $\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} +$ ec. $= 3C$, e così discorrendo; siccome $-\frac{b}{a}$ è il coefficente del secondo termine dell' equazione, $\frac{c}{a}$

il coefficente del terzo termine, $-\frac{e}{a}$ il coefficente del quarto, ec. Con ciò si rende manifesto, che le precedenti determinazioni coincidono perfettamente con quelle di Newton.

4. Non voglio tralasciare di riportar qui una nuova dimostrazione di tal teorema, pubblicata da Eulero poco prima della sua morte nella sua ultima opera, cioè nel primo tomo de' suoi *Opuscoli Analitici* stampati in Pietroburgo nel 1783, dimostrazione, che per una certa sua novità e singolarità merita la considerazione de' Geometri. Egli propone la formula $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+$ ec. come un prodotto dei fattori $1+\alpha z$, $1+\beta z$, $1+\gamma z$, $1+\delta z$, $1+\varepsilon z$, ec., e cerca la somma delle potenze di α, β, γ, δ, ε, ec.

A tal effetto, egli stabilisce per maggior brevità le seguenti equazioni:

$$P=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{ec.}$$
$$Q=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2+\text{ec.}$$
$$R=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3+\text{ec.}$$
$$S=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\varepsilon^4+\text{ec.}$$
ec.

Tutto adunque si riduce a ritrovare i valori di P, Q, R, S, ec. dati per A, B, C, D, ec. Ora egli è evidente, 1° che P dipende unicamente da A, essendo visibilmente $P=A$; 2° che Q non può dipendere se non da A e B, perchè i prodotti di tre lettere α, β, γ, δ, ε, ec. restano esclusi dalla determinazione de' quadrati; 3° che R dipende dalle tre sole quantità A, B, C, perchè i prodotti di quattro lettere α, β, ec. sono esclusi dalla formazione de' cubi; così S dipende dalle quattro sole quantità A, B, C, D. Lo stesso dicasi del resto. Fissata questa legge di dipendenza delle lettere P, Q, R, S, ec. dalle altre A, B, C, D, ec., si potrà sempre trovare la lettera P in quello

stesso modo che se fosse data la sola formola $1 + Az$, e fossero svaniti gli altri coefficienti B, C, D, ec. Ma $1 + Az$ non può avere che un solo fattore della forma $1 + az$, ed in queste circostanze il significato della lettera P importa, che sia $P = a$. Posto poi $1 + az = 0$, ovvero $z = -\frac{1}{a}$, dovrà essere anche $1 + Az = 0$, e conseguentemente $1 - \frac{A}{a} = 0$, oppure $a = A$, che dà subito I°. $P = A$, come già altronde è noto.

Inoltre la lettera Q si determina nella stessa maniera, come se fosse data la sola formola $1 + Az + Bz^2$ essendosi annullati tutti i termini susseguenti. E siccome questa formola ha due fattori della forma $1 + az$, ed $1 + bz$, sarà quindi $P = a + b$, e $Q = a^2 + b^2$. Fatto poi $1 + az = 0$, ossia $z = -\frac{1}{a}$, nasce $1 + Az + Bzz = 0$, e in conseguenza $1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} = 0$, ovvero $a^2 - Aa + B = 0$. In egual modo si ottiene, mediante l'altro fattore $1 + bz$ uguagliato a zero, l'equazione $b^2 - Ab + B = 0$, la quale aggiunta alla precedente dà $a^2 + b^2 - (a + b)A + 2B = 0$, e sostituendo P, e Q, abbiamo $Q - AP + 2B = 0$; e di qui II°. $Q = AP - 2B$.

Parimente il valore di R si ritrova per mezzo della formula cubica $1 + Az + Bz^2 + Cz^3$, la quale si pone $= (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)$, onde abbiasi $P = a + b + c$; $Q = a^2 + b^2 + c^2$, ed $R = a^3 + b^3 + c^3$. In tal supposto, le tre sostituzioni $z = -\frac{1}{a}$, $z = -\frac{1}{b}$, $z = -\frac{1}{c}$ danno le tre equazioni $a^3 - Aa^2 + Ba - C = 0$; $b^3 - Ab^2 + Bb - C = 0$; $c^3 - Ac^2 + Bc - C = 0$,

la somma delle quali è $R - AQ + BP - 3C = 0$, e conseguentemente III°. $R = AQ - BP + 3C$.

Così il valore di S si ricava dalla formola $1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 = (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)$, dove si ha $P = a + b + c + d$; $Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; $R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$; $S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$; e le sostituzioni $z = -\frac{1}{a}$, $z = -\frac{1}{b}$, $z = -\frac{1}{c}$, $z = -\frac{1}{d}$ danno le quattro equazioni

$$a^4 - Aa^3 + Ba^2 - Ca + D = 0,$$
$$b^4 - Ab^3 + Bb^2 - Cb + D = 0,$$
$$c^4 - Ac^3 + Bc^2 - Cc + D = 0,$$
$$d^4 - Ad^3 + Bd^2 - Cd + D = 0,$$

La somma di queste è $S - AR + BQ - CP + 4D = 0$, e quindi abbiamo IV°. $S = AR - BQ + CP - 4D$.

Di qui si scorge la legge, con cui procedono le somme delle più alte potenze, cioè T, V, X, ec., vale a dire

$P = A$;
$Q = AP - 2B$;
$R = AQ - BP + 3C$;
$S = AR - BQ + CP - 4D$;
$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$;
$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$;
$X = AV - BT + CS - DR + EQ - FP + 7G$.
ec.





ARTICOLO II.

Sopra le Concoidi.

5. Siccome in nessun trattato di Calcolo Integrale, per quelle che io sappia, (a riserva di Gio. Bernoulli nel tomo III. delle sue Opere pag. 400., dove considera la sola specie della Concoide che ha perduto il suo nodo, e ne dà la quadratura mediante la descrizione dell'iperbola, e del Sig. Ab. Marie, che nelle sue Lezioni §. 909. si vale per quadrare questa curva della sua equazione polare, e non dell'equazione all'asse) si ritrova la quadratura della Concoide di Nicomede, e per altra parte una tal quadratura ha la particolarità assai singolare di dipendere nel tempo stesso dalla quadratura del cerchio e da quella dell'iperbola, ho stimato non inutile d'intraprender questa ricerca in grazia degli studiosi dell'Analisi Sublime, ai quali la cognizione delle proprietà d'una curva tanto famosa non sarà inutile o discara.

1. 6. Se due rette *AB*, *EF* (Fig. 1.) si tagliano perpendicolarmente in *D*; e da un dato punto *C* preso sulla retta *AB* si guida una retta *NM* formante con *AB* un angolo indeterminato *MCB*, e che taglia in *G* la *EF*, ed in questa retta si prendono sempre le porzioni eguali *GM*, *GN* di quà e di là del punto *G*; con tal procedere, tutti i punti *M* ed *N* vengono a descrivere la curva chiamata dal suo inventore Concoide di Nicomede. La retta indefinita *EF* si nomina l'asse, e dagli antichi la direttrice della Concoide, e *C* si chiama il suo polo.

7. Pongasi $AD = DB = MG = GN = b$, e $CD = a$; inoltre $CP = u$, $PM = y$, e l'angolo $PCM = \varphi$. Sarà dunque $CM = CG + GM = a \, sec. \varphi + b = \sqrt{(uu + yy)}$. Ma $tang. \varphi = \frac{y}{u}$; e $sec. \varphi = \sqrt{(1 + tang. \varphi^2)} = \frac{\sqrt{(uu + yy)}}{u}$; dunque avremo $\sqrt{(uu + yy)} = \frac{a \sqrt{(uu + yy)}}{u} + b$, e trasponendo e quadrando $(u - a)^2 (uu + yy) = bbuu$, e quindi $yy = \frac{b^2 u^2 - (u - a)^2 u^2}{(u-a)^2}$, la qual equazione dà a divedere, che la Concoide è una linea del quart' ordine.

8. Faccio ora $DP = x = CP - CD = u - a$; e l'equazione precedente si cangia in $yy = \ldots \frac{(b^2 - x^2)(a + x)^2}{x^2}$, e quindi $y = \ldots \frac{(a+x)}{x} \sqrt{(b^2 - x^2)}$. Lo spazio BPM sarà dunque $= \int - ydx = \int - \frac{(a + x)}{x} dx \sqrt{(b^2 - x^2)} = \int - dx \sqrt{(b^2 - x^2)} + \int - \frac{adx}{x} \sqrt{(b^2 - x^2)}$. Se presentemente per integrare queste formole si facesse al solito la sostituzione $\sqrt{(b^2 - x^2)} = b - xz$ per togliere l'irrazionalità, l'integrazione riuscirebbe lunga e laboriosa; e per risparmiare questa fatica basta sostituire $\sqrt{(b^2 - x^2)} = xz$, che facilita il calcolo ancorchè non faccia sparire l'irrazionalità. Con ciò sarà $b^2 - x^2 = x^2 z^2$; $x = \frac{b}{\sqrt{(1 + z^2)}}$; $dx = - \frac{bzdz}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\sqrt{(b^2 - x^2)} = \frac{bz}{\sqrt{(1 + z^2)}}$; e conseguentemente $dx \sqrt{(b^2 - x^2)} = - \frac{b^2 z^2 dz}{(1 + z^2)^2}$,

ed inoltre $\frac{adx}{x}\sqrt{(b^2-x^2)}=-\frac{abz^2dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Perlocchè avremo $\int -ydx=b^2\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}+ab\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Per integrare queste due formole ricorro al teorema noto $\int\frac{z^p dz}{(a+bz^m)^q}=-\frac{z^{p-m+1}}{(q-1)mb(a+bz^m)^{q-1}}+\frac{p-m+1}{(q-1)mb}\int\frac{z^{p-m}dz}{(a+bz^m)^{q-1}}$, dove il paragone con $\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$ dà $p=2$, $q=2$, $a=1$, $b=1$, $m=2$; ond'è $\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}=-\frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}=-\frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}$. *Arc. tang.* z, cioè $b^2\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}=-\frac{b^2z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}b^2$. *Arc. tang.* z.

9. Dal paragone poi del predetto teorema coll' altra formola $\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, diventando $q=\frac{3}{2}$, e tutto il resto stando come prima, avremo $\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{z}{\sqrt{(1+z^2)}}+\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}}=-\frac{z}{\sqrt{(1+z^2)}}+\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}}\left(\frac{z+\sqrt{(1+z^2)}}{z+\sqrt{(1+z^2)}}\right)=-\frac{z}{\sqrt{(1+z^2)}}+$ *log.* $[z+\sqrt{(1+z^2)}]$, e però $ab\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{abz}{\sqrt{(1+z^2)}}+ab$. *log.* $[z+\sqrt{(1+z^2)}]$.

Laonde si avrà $\int -ydx = -\frac{b^2 z}{2(1+z^2)} - \frac{abz}{\sqrt{(1+z^2)}}$ $+ ab\, log. [z + \sqrt{(1+z^2)}] + \frac{1}{2} b^2$ *Arc. tang.* z + *Cost.* E siccome $z = \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x}$, $\sqrt{(1+z^2)} = \frac{b}{x}$, sarà perciò $\int -ydx = -\frac{1}{2} x\sqrt{(b^2 - x^2)} - a\sqrt{(b^2 - x^2)} + ab\, log. \left[\frac{b + \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x}\right] \ldots\ldots + \frac{1}{2} b^2\, Arc.\, tang. \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x}$ senza Costante, perchè svanisce lo spazio BPM allorchè $x = b$. Dunque $BPM = -(a + \frac{1}{2}x)\sqrt{(b^2 - x^2)} \ldots\ldots + \frac{1}{2} b^2.\, Arc.\, tang. \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x} + ab\, log. \frac{b + \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x}$. Dunque la quadratura della Concoide involge la quadratura d' uno spazio rettilineo, la quadratura del cerchio, e la quadratura dell' iperbola.

10. Il D' Alembert nell' *Art. Concoide* dell' Enciclopedia dice essersi negato da alcuni, che lo spazio concoidale asintotico infinitamente lungo $BDFM'$ sia di valore infinito, e per dimostrarlo tale, egli adduce una ragione, che non si comprende se non con risolvere il problema della sua quadratura, trascurato quivi dal D'Alembert. Ma la nostra espressione ci mostra subito il valore infinito di questo spazio facendo $x = 0$, nel qual caso diventa $BDFM' = -ab + \frac{1}{2} b^2 \times$ *Quadrante* $+ ab\, log.\, \infty = \infty$.

11. Si ottiene questa quadratura anche facendo uso dell' equazione polare della Concoide; avvegnachè posto il raggio vettore $CM = r$, si ha subito $r = a\, sec.\, \varphi + b = \frac{a}{cos.\varphi} + b$, che è l' equazione polare. Ora lo spazio $CBM = \frac{1}{2}\int rrd\varphi = \ldots\ldots$

$\frac{1}{2}\int\left(\frac{a}{cos.\varphi}+b\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}b^2\varphi + ab\int\frac{d\varphi}{cos.\varphi} + \frac{1}{2}a^2\int\frac{d\varphi}{cos.\varphi^2} = \frac{1}{2}b^2\varphi + \frac{1}{2}a^2 tang.\varphi + ab\int\frac{d\varphi}{cos.\varphi}$. Osservo, che la formola $\frac{d\varphi}{cos.\varphi} = \frac{d\varphi\, cos.\varphi}{cos.\varphi^2} = \ldots \frac{d\, sen.\varphi}{(1+sen.\varphi)(1-sen.\varphi)} = \frac{\frac{1}{2}d.sen.\varphi}{1+sen.\varphi} + \frac{\frac{1}{2}d.sen\,\varphi}{1-sen.\varphi}$; e conseguentemente $\int\frac{d\varphi}{cos.\varphi} = \frac{1}{2}log.(1+sen.\varphi) - \frac{1}{2}log.(1-sen.\varphi) = log.\sqrt{\frac{1+sen.\varphi}{1-sen.\varphi}} = log.\ tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$. Laonde avremo $\frac{1}{2}\int rrd\varphi = \frac{1}{2}a^2 tang.\varphi + \frac{1}{2}b^2\varphi + ab\, log.tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$ senza costante, perchè insieme coll'angolo φ svanisce così lo spazio concoidale *CBM* come l'integrale trovato.

12. Se ora da questo valore dell'aja $CBM = \frac{1}{2}a^2 tang.\varphi + \frac{1}{2}b^2\varphi + ab\ log.\ tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$ si rottrae il triangolo $CDG = \frac{1}{2}a^2 tang.\varphi$, si avrà l'aja $GDBM = \frac{1}{2}b^2\varphi + ab\, log.\ tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$.

13. E se dalla stessa aja *CBM* si leva il triangolo $CPM = \frac{1}{2}CP.PM = \frac{1}{2}(a+b\,cos.\varphi)\left(\frac{a\,sen.\varphi}{cos.\varphi}+b\,sen.\varphi\right) = \frac{1}{2}a^2 tang.\varphi + ab\,sen.\varphi + \frac{1}{2}b^2 sen.\varphi\,cos.\varphi$, rimane lo spazio concoidale $BPM = \frac{1}{2}b^2\varphi + ab\,log.\,tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi) - ab\,sen.\varphi - \frac{1}{4}b^2\,sen.2\varphi$.

14. Di qui apparisce, che per avere tutto lo spazio asintotico *BDFM'* basta fare $\varphi = 90^\circ$, ed allora l'espressione ritrovata sì cangia in $\frac{1}{2}b^2 \times$ *Quadrante* $- ab + ab\ log.\ \infty$, come appunto si è ritrovato mediante l'equazione delle coordinate all'asse.

15. Per quadrare l'altro spazio asintotico *CDG'N'*, si conducano le due rette infinitamente vicine *CG'*, *Cg*, che tagliano il ramo inferiore della

Concoide in N', n, e l'asintoto in G', g, e fatto centro in C co' raggi CG', CN' si descrivano gli archetti circolari $G'q$, $N'p$. Ciò fatto, si scorge evidentemente, che il trapezio $N'G'gn$, ovvero $N'G'qp$ è l'elemento dello spazio $COG'N'$, essendo CO tangente della Concoide in C. Ora ritenuto che φ rappresenti l'angolo PCG', $CG' = \frac{a}{cos.\varphi}$, e però $G'q = \frac{ad\varphi}{cos.\varphi}$; e parimente $CN' = CG' - G'N' = \frac{a}{cos.\varphi} - b$, e quindi $N'p = \frac{ad\varphi}{cos.\varphi} - bd\varphi$: sarà dunque il trapezio $N'G'qp = \frac{1}{2}(G'q + N'p) . N'G' = \frac{abd\varphi}{cos.\varphi} - \frac{1}{2} b^2 d\varphi$; ed integrando avremo $COG'N' = ab\ log.\ tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) - \frac{1}{2} b^2 \varphi + Cost.$ Per determinar la costante, io osservo, che svanisce lo spazio $COG'N'$ allorchè svanisce la $CN' = \frac{a}{cos.\varphi} - b$, ovvero allorchè $\frac{a}{cos.\varphi} = b$, e quindi $cos.\varphi = \frac{a}{b}$, nel qual caso l'angolo φ diventa un angolo conosciuto α. Sarà dunque $Cost. = \frac{1}{2} b^2 \alpha - ab\ log.\ tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$. Perlocchè avremo $COG'N' = ab\ log.\ \frac{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)} - \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \alpha)$.

16. La formola $ab\ log.\ \frac{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)} - \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \alpha)$, acquista un valore infinito con fare $\varphi = 90^\circ$; il che ci fa conoscere, che lo spazio concoidale asintotico $COFS$ ha un valore infinito.

17. Se allo spazio $COG'N'$ si aggiugne il triangolo $CDO = \frac{1}{2} CD.DO = \frac{1}{2} a . a . tang.\alpha$, risulta lo spazio $CDG'N' = \frac{1}{2} a^2\ tang.\ \alpha - \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \alpha) + ab\ log.\ \frac{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}$.

18. Il segmento concoidale $CN'K = \frac{1}{2}\int CN'.N'p$ $= \frac{1}{2}\int\left(\frac{a}{cos.\varphi} - b\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 tang.\, \varphi + \frac{1}{2} b^2 \varphi -$ $ab\ log.\ tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) + Cost.$; e poichè svanisce $CN'K$ quando $\varphi = \alpha$, sarà quindi $Cost. =$ $ab\ log.\ tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) - \frac{1}{2} b^2 \alpha - \frac{1}{2} a^2\ tang.\ \alpha$. Perlocchè avremo $CN'K = \frac{1}{2} a^2 (tang.\,\varphi - tang.\ \alpha)$ $+ \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \alpha) - ab\ log.\ \frac{tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}$.

19. Questo stesso si ottiene, se dal triangolo $CG'O = CG'D - COD = \frac{1}{2} a^2\ tang.\,\varphi - \frac{1}{2} a^2\ tang.\ \alpha$ si sottrae $COG'N'K = ab\ log.\ \frac{tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)} -$ $\frac{1}{2} b^2 (\varphi - \alpha)$ (15°.), con che nasce $CN'K =$ $\frac{1}{2} a^2 (tang.\,\varphi - tang.\ \alpha) + \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \alpha) -$ $ab\ log.\ \frac{tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}$, come prima.

20. Quando il raggio vettore CN' diventa parallelo all' asintoto, e si cangia in CQ; allora diventando $\varphi = 90^\circ$, e sostituendo questo valore nell'espressione del segmento $CN'K$, nasce lo spazio infinitamente esteso $CN'SQ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \infty - ab\ log.\ \infty$, che è un valore infinito; avvegnachè il binomio $\infty - log.\ \infty$ è una quantità infinita per essere il secondo termine, come tutti sanno, infinitamente minore del primo.

21. Con egual procedere si trova la quadratura del nodo $CRAH$ della Concoide. Imperciocchè essendo $CN = GN - GC = b - \frac{a}{cos.\,\varphi}$, sarà lo spazio, o il settore $CAN = \frac{1}{2}\int d\varphi \left(b - \frac{a}{cos.\,\varphi}\right)^2 =$ $\frac{1}{2} b^2 \varphi + \frac{1}{2} a^2\ tang.\,\varphi - ab\ log.\ tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, senza costante, perchè svanisce il settore CAN in un coll'angolo φ.

22. Cangiando φ in α si ottiene $\frac{1}{2} a^2\ tang.\ \alpha +$

$\frac{1}{2} b^2 \alpha - ab \log. tang. (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)$ per la quadratura del seminodo $CANH$; e conseguentemente risulta il nodo intero $CRAH = a^2 \, tang. \, \alpha + b^2 \alpha - 2ab \log. tang. (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)$.

23. Si descrive la Concoide mediante il moto d'una riga, la quale volgendosi in giro intorno al polo C passa pel centro d'un cerchio situato sull' asse EF, e spinge lo stesso centro lungo il detto asse tagliando sempre la periferia del cerchio in due punti diametralmente opposti, i quali appartengono ai rami conjugati della Concoide.

24. Si può anche in siffatta guisa formare un' infinità di Concoidi differenti: avvegnachè se in vece del cerchio si fa muovere una curva qualunque OM (Fig. 2.) lungo l'asse FE, la sua intersezione con una riga CM mobile intorno a C, ed obbligata a passare per un punto fisso G dell'asse della Curva OM descriverà una Concoide, di cui sarà facile trovar l'equazione. In fatti, posta $CD = a$, $OG = b$, $DR = x$, $RM = y$, $OR = z$, sarà $RG = OR - OG = z - b$, $GD = DR - RG = x + b - z$, e per li triangoli simili RGM, GCD sarà $z - b : y :: x - z + b : a$, ovvero $az - ab = yx - zy + by$, e quindi $z = \frac{b(a+y)+yx}{a+y} = b + \frac{xy}{a+y}$. Se ora si sostituisce questo valore di z nell'equazione della curva generatrice OM data per z ed y, si avrà un'equazione fra x ed y, che esprimerà in conseguenza la natura della Concoide BM. 2.

25. Se la curva generatrice OM è un cerchio, di cui il punto dato G sia il centro, avremo $yy = 2bz - zz$, e però $z = b \pm \sqrt{(bb - yy)}$. Sostituendo questo valore nell'equazione $z = b + \ldots \frac{xy}{a+y}$, ne ritraghiamo $\frac{xy}{a+y} = \pm \sqrt{(bb - yy)}$,

ovvero $x^2y^2 = (bb - yy)(a + y)^2$, che è appunto l' equazione della Concoide di Nicomede colle coordinate permutate (8°.).

26. Se la curva generatrice è la parabola Apolloniana dell' equazione $y^2 = pz$, essendo p il parametro; allora la sostituzione del valore $\frac{y^2}{p}$ di z dà $y^3 + ay^2 - pxy - pby - pab = o$ per l' equazione della così detta Concoide Parabolica, di cui si è servito Cartesio nella sua Geometria per risolvere un' equazione generale del sesto grado. Ved. Hôpital *Sect. Con.* §. 405.

27. La prima ordinata DB della Concoide Parabolica si ottiene ponendo $x = o$ nell' equazione di questa curva, con che si ha l' equazione cubica $y^3 + ay^2 - pby - pab = o$, la risoluzione della quale darà il richiesto valore di y.

28. Potrebbe sembrare a prima vista, che nella Concoide Parabolica si annullasse la y quando diventa infinita la x, ma l' equazione $y^3 + ay^2 - pxy - pby - pab = o$, da cui si ricava $x = \ldots \frac{y^3 + ay^2 - pby - pab}{py}$, mostra chiaramente, che diventando x infinita dee pur essere infinita la y, perchè se y fosse infinitamente piccola, come potrebbe a taluno parere, riuscirebbe x negativa contro l' assunto. In questo caso poi di $x = \infty$, si avrà $x = \frac{y^2}{p}$. Lo stesso può parimenti vedersi col riflettere all' andamento che dee avere la curva.

29. Essendo $\frac{dy}{dx} = \frac{py^2}{2y^3 + ay^2 + pab}$ l' espressione dalla tangente dell' angolo formato dalla curva coll' asse delle x; se si supporrà $\frac{dy}{dx} = o$, si otterrà $y = o$, oppure $y = \infty$; ma $y = o$ non può stare coll' equazione della curva, come è facile a vedersi; dunque sarà $y = \infty$, cioè a dire la curva ha

un ramo infinito, che cammina parallelamente all' asse quando diventa infinito.



ARTICOLO III.

Sopra la Spirale Iperbolica.

Il famoso Giovanni Bernoulli è l'inventore della Curva da esso denominata Spirale Iperbolica, o reciproca; ed egli sembra compiacersi di questa scoperta là dove nel Tomo IV. delle sue Opere pag. 177. facendo una rigida censura al Calcolo Integrale di Stone dice: *nè Cotes, nè Stone hanno pensato a questa curva, ed alle sue proprietà prima di me.*. Par verisimile, che questo gran Geometra a forza di sottigliezza e di penetrazione con premeditato disegno abbia ideato una tal Curva per l'impegno assai vivo, in cui era entrato di far vedere, che la soluzione del problema *inverso* delle forze centrali recata da Newton era difettosa e paralogistica. Newton nella sua grand' opera de' Principj dimostra rigorosamente, che la forza centrale d'un corpo, diretta verso uno dei fuochi d'una Sezione Conica qualunque da esso descritta, seguita sempre la ragione inversa de' quadrati delle distanze di detto corpo da quel fuoco; nel che consiste il problema diretto delle forze centrali, nel quale *data la curva descritta si dimanda la legge della forza*. Da questa proposizione Newton deduce come corollario immediato senza nuova dimostrazione l'altra proposizione inversa, cioè che se la forza centrale d'un corpo, il qual descrive una curva, è in ragion reciproca duplicata delle distanze di questo corpo da qualche

punto del piano della curva, essa è sempre una sezione conica avente il detto punto per fuoco: e questo è il così detto problema *inverso* delle forze centrali, in cui *data la legge della forza si cerca la curva percorsa dal corpo*. Bernoulli ostinatosi a negare la legittimità di questa conseguenza opponeva al Newton la Spirale Iperbolica, la quale per esser descritta da un corpo esige una forza centrale reciprocamente proporzionale al cubo delle distanze dal centro o polo della curva, e questa stessa forza, per un teorema del medesimo Newton, è pur anco richiesta per descrivere la spirale Logaritmica, essenzialmente diversa dall' Iperbolica. Siccome adunque questa legge di forze centrali, proporzionali al cubo inverso delle distanze, non si restringe alla sola Spirale Logaritmica; così potrebbe avvenire, che l'altra legge delle forze, proporzionali al quadrato inverso delle distanze, non si limitasse alle sole sezioni coniche, ma ad altre curve di specie e natura diverse si estendesse. Nel Tomo I. delle sue Opere pag. 555. così si esprime Bernoulli in questo proposito: *Quemadmodum igitur ex eo, quod pro gyratione corporis in Spirali Logarithmica, requiritur vis centripeta in reciproca triplicata ratione distantiarum, male quis concluderet huius propositionis conversam, asserendo nempe, quod ergo vicissim posita hac lege vis centripeta necesse sit, ut curva existat Spiralis Logarithmica; siquidem altera Spiralis Hyperbolica, et aliae multae curvae, tam algebraicae quam transcedentes eadem virium lege gaudent: ita quoque ex eo quod demonstratur corpus gyrans in Sectione Conica, centro virium existente in foco, requirere vim centripetam reciproce proportionalem quadratis distantiarum, non sine aliqua paralogismi specie colligitur, supposita ista centripetarum virium proportione, curvam mòtu corporis describendam fore Sectionem Conicam, tametsi Newtonus ipse in eun-*

dem lapidem impegerit; nisi prius demonstretur, hic se rem aliter habere, quam in hypothesi virium cubis distantiarum reciproce proportionalium, quam diversis curvis convenire posse ostendimus; atque Sectiones Conicas solas esse, quae admittant vires in duplicata reciproca ratione distantiarum. Ma Newton, il quale avea già protestato (*a*) di non voler entrare in contese letterarie per non aver a stringer l'ombra, e perdere la sua quiete, ch' egli chiamava *cosa onninamente sostanziale*, non si diede alcun pensiero di ribattere gli attacchi di Bernoulli; tanto più che questi avea sempre manifestata una certa animosità contro i Geometri Inglesi, ed era come alla testa d'una specie di lega de' Geometri del Continente contro quelli d'Inghilterra. Ma risposero per Newton i Geometri di quel Paese, interessati a difendere la gloria e superiorità del loro compatriota. Essi fecero osservare, che un corpo gettato con una data velocità secondo una data direzione, e tirato da una forza centrale reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza dal punto attraente non può muoversi se non con una sola ed unica legge, e che in conseguenza se quel corpo può sotto queste condizioni descrivere una certa curva, egli dee descriverla effettivamente. E siccome Newton avea precisamente determinato la Sezione conica, sulla quale il projettile *poteva* muoversi; ne veniva in conseguenza, ch' egli avea pienamente soddisfatto alla questione, e non era tenuto a dire di più.

(*a*) *Et subortae statim (per diversorum epistolas objectionibus refertas) crebrae interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt, et effecerunt, ut me arguerem imprudentiae quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.* Newt.

Del resto, per ciò che spetta la legge della forza centripeta, proporzionale al cubo inverso delle distanze, e tutte le curve descritte con questa legge, tra le quali si conta principalmente la Spirale Iperbolica, si può vedere la mia prima Memoria su tale argomento, aggiunta alla traduzione italiana della Meccanica del Sig. Ab. Bossut, stampata in Pavia nel 1788.

3. 30. Sopra una retta indefinita CO (Fig. 3.) è dato un punto C, dal quale parte una data retta $CA = a$, che forma coll' indefinita CO un angolo dato $ACO = \omega$, ed intorno a C come polo si descrive una linea curva FMA con questa legge, che gli angoli BCA, BCD, BCM, ec. siano sempre in ragione inversa de' raggi vettori CA, CD, CM, ec., cioè $BCA : BCM :: CM : CA$, e $BCD : BCM :: CM : CD$. Questa linea porta il nome di Spirale Iperbolica per la somiglianza, che ha nella sua proprietà principale coll' Iperbola conica, nella quale le ascisse prese sopra un asintoto sono in ragione inversa delle ordinate parallele all' altro asintoto.

31. Dicasi u l'angolo variabile ACM, ed y il raggio vettore corrispondente CM, e per la proprietà di questa Spirale sarà $\omega : \omega + u :: y : a$, e quindi $y = \frac{a\omega}{\omega + u}$, che è l'equazione della Spirale Iperbolica. Da questa equazione si scorge, che fatto $u = -\omega$, cioè preso l'ango ACM dalla parte opposta, e fatto uguale ad ACB, il raggio vettore y diventa infinito, e conseguentemente il ramo MA della Spirale si allunga senza fine correndo in direzione di CO. Se $u = 360^\circ - \omega$, diviene $y = \frac{a\omega}{360^\circ} = CF$. E così potendosi prendere per u un multiplo qualunque di 360°, si rende manifesto, che la

Spirale Iperbolica si avvolge per infiniti giri intorno al polo C senza mai raggiugnerlo.

32. Se coi raggi vettori CA, CD si descrivono gli archi circolari AB, DE, questi sono sempre uguali, dovunque si pigli sulla spirale il punto D: avvegnachè essendo $\omega : \omega + u :: y : a$, ne nasce $a\omega = y(\omega + u)$, vale a dire $AB = DE$.

33. Tirandosi la retta indefinita HI parallela alla CO, e distante da essa per un intervallo uguale ad uno degli archi circolari AB, DE, ec., trovasi essere HI l'asintoto della Spirale, perchè comunque lontano si prenda il punto D dal punto A alla sinistra di quest'ultimo, l'arco DE rimane sempre uguale ad AB, ed ha per limite, a cui sempre più si accosta nella posizione, una retta a se uguale, e perpendicolare a CO.

34. Tiro la tangente MT, e la CT perpendicolare al raggio vettore CM. L'equazione differenziale della Curva mi dà $dy = -\frac{a\omega du}{(\omega + u)^2}$, e la formola generale della sottangente nelle Curve polari, cioè $\frac{y^2 du}{dy}$, mediante la sostituzione de' valori di y^2, e dy, si cangia in $-a\omega$, dove il segno $-$ indica soltanto la posizione. Dunque la sottangente $CT = -a\omega$, cioè sempre uguale all'arco AB, e quindi costante.

35. Guido Mn normale alla Curva, o alla tangente MT, e concorrente in n colla sottangente TC prodotta. Con ciò hassi la sottonormale $Cn = \frac{CM^2}{CT} = -\frac{y^2}{a\omega}$, vale a dire terza proporzionale all'arco costante BA, e al raggio vettore CM.

36. Dal polo C conduco alla tangente MT la normale $CQ = q$; e siccome $MT = \sqrt{(CT^2 + CM^2)}$

$$= \sqrt{(a^2\omega^2 + y^2)}, \text{ e } CQ = \frac{CT \cdot CM}{MT} =$$

$\frac{a\omega y}{\sqrt{(a^2\omega^2 + y^2)}} = q$, sarà quindi $dq = \ldots$ $\frac{a^2\omega^3 dy}{(a^2\omega^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Laonde essendo, come è noto $\frac{ydy}{dq}$ la formola del raggio osculatore nelle Curve Polari, avremo $\frac{y(a^2\omega^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\omega^3}$ per l'espressione del raggio osculatore in questa Spirale; il quale scopresi proporzionale al raggio vettore, ed al cubo della tangente, e precisamente uguale alla quarta proporzionale dopo il cubo della sottangente, il cubo della tangente, ed il raggio vettore.

37. Si ha la quadratura dello spazio ACM con integrare la formola $\frac{1}{2}yydu$. Ma $\int \frac{1}{2}yydu = \frac{1}{2}\int \frac{a^2\omega^2 du}{(\omega + u)^2}$ $= - \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2}{\omega + u} + Cost. = \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2}{\omega} - \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2}{\omega + u}$, perchè svaniscono nel tempo stesso lo spazio ACM, e l'angolo u. Dunque $ACM = \frac{\frac{1}{2}a^2\omega u}{\omega + u}$; nella qual' espressione sostituendo per u il suo valore dato per y, cioè $\frac{a\omega - \omega y}{y}$, si ritrova $ACM = \frac{1}{2}a\omega(a - y)$, vale a dire lo spazio compreso da due raggi vettori e dall'arco è uguale al semirettangolo della sottangente costante nella differenza de' raggi vettori. Di qui si scorge, facendo $y = 0$, che lo spazio intero; che con infiniti giri si avvolge intorno al polo, è uguale alla metà del rettangolo della sottangente nel primo raggio vettore; e ciò si deduce anche dall'espressione $\frac{\frac{1}{2}a^2\omega u}{\omega + u}$, la quale facendo l'angolo $u = \infty$, si cangia in $\frac{1}{2}a^2\omega$.

38. Posto $360^\circ = 2\pi$, è manifesto che $y =$

CM diventa CK, quando l'angolo $ACM = u$ diventa 2π; onde (§. 31.) si ottiene $CK = \frac{a\omega}{\omega + 2\pi}$. Per simil ragione CM si cangia in CN, allorchè u cresce di 2π diventando $u + 2\pi$; conseguentemente si ha $CN = \frac{a\omega}{\omega + 2\pi + u}$. Ora l'elemento dello spazio KCN è $= \frac{1}{2}CN^2du = \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2du}{(\omega + 2\pi + u)^2}$; dunque integrando sarà $KCN = -\frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2}{\omega + 2\pi + u} + Cost.$ Si determina la Costante con osservare, che si annulla lo spazio KCN quando si annulla l'angolo $KCN = u$, il che dà $Cost. = \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2}{\omega + 2\pi}$; e quindi lo spazio $KCN = \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2u}{(\omega + 2\pi)(\omega + 2\pi + u)}$. Sottratto poi questo spazio KCN dall'altro $ACM = \frac{\frac{1}{2}a^2\omega u}{\omega + u}$, si trova per lo spazio $AKNMDA$, rinchiuso fra i due archi AM, KN, e le rette AK, MN, l'espressione $\frac{\frac{1}{2}a^2\omega u}{\omega + u} - \frac{\frac{1}{2}a^2\omega^2u}{(\omega + 2\pi)(\omega + 2\pi + u)}$, ovvero, riducendo allo stesso denominatore, ...

$$\frac{\pi(2\pi + 2\omega + u)a^2\omega u}{(2\pi + \omega)(2\pi + \omega + u)(\omega + u)}.$$

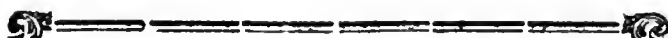
39. Se nell'espressione ora trovata . . . . $\frac{\pi(2\pi + 2\omega + u)a^2\omega u}{(2\pi + \omega)(2\pi + \omega + u)(\omega + u)}$ dello spazio $AKNMDA$ si piglia l'angolo KCN, ovvero $u = 2\pi$, allora essa si trasforma in $\frac{4\pi^2a^2\omega}{(2\pi + \omega)(4\pi + \omega)}$, la quale rappresenta il valore dello spazio compreso fra i due archi $ADMFK$, KNL, e le rette KA, KL. Con questo metodo si procede per quadrare lo spazio contenuto fra gli altri giri successivi della Spirale.

40. Si ha la rettificazione di questa Curva col mezzo de' logaritmi, ovvero della quadratura dell' iperbola. In fatti l' elemento dell' arco ADM è $\sqrt{(dy^2+y^2du^2)}$, e questa formola, sostituendovi i valori di y, e dy (§. 31. 34), diviene $\frac{a\omega du}{(\omega+u)^2}\times\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}$. Ora per integrare la quantità $\frac{a\omega du}{(\omega+u)^2}\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}$, faccio $1+(\omega+u)^2 = (\omega+u)^2z^2$, e differenziando ho $du(\omega+u) = du(\omega+u)z^2+zdz(\omega+u)$; e dividendo per $\omega+u$, e trasponendo, $du(1-z^2)=zdz(\omega+u)$, e quindi $\frac{du}{\omega+u}=\frac{zdz}{1-z^2}$, $\frac{du}{(\omega+u)^2} = \ldots\ldots \frac{zdz}{(\omega+u)(1-z^2)}$, e così $\frac{a\omega du}{(\omega+u)^2}\sqrt{[1+(\omega+u)^2]} = \frac{a\omega zdz}{(\omega+u)(1-z^2)}\sqrt{[(\omega+u)^2z^2]} = \frac{a\omega z^2dz}{1-z^2} = -a\omega dz + \frac{a\omega dz}{1-z^2} = -a\omega dz + \frac{\frac{1}{2}a\omega dz}{1+z} + \frac{\frac{1}{2}a\omega dz}{1-z}$. Dunque integrando, sarà l' arco $ADM = -a\omega z + \frac{1}{2}a\omega\log.\frac{1+z}{1-z} + Cost. = -\frac{a\omega\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+u} + \frac{1}{2}a\omega\log.\frac{\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+u-\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}} + Cost.$ Siccome poi svanisce l'arco ADM, allorchè si annulla anche l' angolo ACM, ovvero u; quindi si ricava $Cost. = a\sqrt{(1+\omega^2)} - \frac{1}{2}a\omega\log.\frac{\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}}{\omega-\sqrt{(1+\omega^2)}}$; e per conseguenza l' arco $ADM = a\sqrt{(1+\omega^2)} - \frac{a\omega\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+u} + \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1}{2}a\omega\log.\frac{[\omega-\sqrt{(1+\omega^2)}][\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}]}{[\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}][\omega+u-\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}]}$. Per render più semplice la quantità logaritmica, osservo, che $\frac{\omega-\sqrt{(1+\omega^2)}}{\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}}$ moltiplicando sotto e

sopra pel denominatore si cangia in — . . . .
$\frac{1}{[\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}]^2}$, ed $\frac{\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+u-\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}$ diventa, moltiplicando sotto e sopra pel numeratore, $-[\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}]^2$. Dunque il detto logaritmo si riduce ad . . . .
$\frac{1}{2}\,a\omega\,log.\,\frac{[\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}]^2}{[\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}]^2}$, ovvero ad
$a\omega\,log.\,\frac{\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}}$; ed in conseguenza sarà l'arco $ADM = a\sqrt{(1+\omega^2)}$ — . . .
$\frac{a\omega\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+u} + a\omega\,log.\,\frac{\omega+u+\sqrt{[1+(\omega+u)^2]}}{\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}}$.

41. Facendo nella detta espressione l'angolo $u = -\omega$, è manifesto, che se ne avrà il valore dell'arco infinitamente prolungato *AS*, il quale risulta $= a\sqrt{(1+\omega^2)} - a\omega\,log.\,[\omega+\sqrt{(1+\omega^2)}] - \frac{a\omega}{0} = -\frac{a\omega}{0} = -\infty$, col segno negativo, perchè si piglia in direzione opposta all'arco *AM*. Se poi si piglia l'angolo u infinitamente grande, allora si trova, che la lunghezza delle infinite spire, le quali incominciando da *A* circondano il polo *C*, è $= a\sqrt{(1+\omega^2)} - a\omega + a\omega\,log.\,\infty = log.\,\infty$, cioè uguale all'infinito logaritmico, che vale il dire, essere la detta lunghezza infinitamente minore di quella del ramo asintotico *AS*, ma però sempre infinita ancor essa, contro ciò che ha recentemente preteso qualche celebre Geometra Tedesco.





ARTICOLO IV.

Sopra la misura di alcuni solidi e superficie rotonde.

42. Vi ha nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1709. una Memoria di Parent sopra le Figure uguali fra loro nella superficie curva, e nella solidità insieme, dove questo Geometra al §. 11. propone senza dimostrazione questo elegante teorema: *se un segmento circolare formato dal quarto della circonferenza, e dalla sua corda si rivolge intorno al diametro parallelo alla corda, l'anello, che ne risulta, è uguale nella solidità, e nella superficie interna alla solidità, e alla superficie della sfera, che vuolsi immaginare inscritta all' anello, ovvero che ha per raggio la distanza del centro del cerchio dalla corda del quarto della periferia.*

Per dimostrare questo teorema, sia nel semi-
4. circolo (Fig. 4.) AOB l'arco MON di 90°, ed MN la sua corda parallela al diametro AB, e dagli estremi della corda si abbassino sul diametro le perpendicolari MG, NF. Rotandosi questo semicircolo intorno al diametro AB, e generando la sfera, basta dimostrare, che se da questa sfera si toglie l'uno, e l'altro segmento generato dagli spazj NFB, MGA, ed il cilindro generato dal rettangolo $MGFN$, il residuo, che è l'anello generato dal segmento circolare MNO, è per appunto uguale alla sfera descritta col semidiametro NF. Ora posto $CB = r$, e chiamando x l'ascissa sul diametro AB, computata da B, ed y l'ordinata, ed essendo $\pi : 1$ il rapporto della periferia circolare al diametro, si ha

per la solidità d'un segmento sferico indefinito la formola $\int \pi y^2 dx = \int \pi dx\,(2rx - x^2) = \pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$, dove basta sostituire per x il valore di BF per avere la solidità del segmento generato da NFB. Siccome pertanto l'arco NB è di 45°, sarà $NF = FC = \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$, e perciò $FB = r - \sqrt{\frac{1}{2}r^2} = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)r$, $FB^2 = \left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)r^2$, $FB^3 = \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)r^3$, sostituendo questi valori per x nell'espressione $\pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$, essa si cangia in $\pi\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6} + \frac{7}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)r^3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\pi r^3$, il cui doppio . . . . . $\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\pi r^3$ è la solidità de'due segmenti generati da NFB, MGA, a cui aggiugnendo la solidità del cilindro generato dal rettangolo FM, che è $\pi . FN^2 . FG$, ovvero $\pi r^3 \sqrt{\frac{1}{2}}$, nasce $\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\pi r^3$, che sottratto dalla solidità della sfera, ovvero da $\frac{4}{3}\pi r^3$ resta $\frac{2}{3}\pi r^3 \sqrt{\frac{1}{2}}$ per la solidità dell'anello; e questa scopresi immantinente eguale alla solidità della sfera descritta col raggio NF, ovvero $r\sqrt{\frac{1}{2}}$, che è per appunto $\frac{4}{3}\pi\left(r\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 \sqrt{\frac{1}{2}}$: che è il teorema proposto.

43. Per ciò che spetta alla superficie interna dell'anello, questa non è altro che la superficie

curva del cilindro generato dal rettangolo *FM*, cioè del cilindro circoscritto alla sfera aventa per raggio *NF*, e perciò essa è uguale alla superficie di detta sfera, come è noto da Archimede in quà.

Il Fontenelle nella Storia dell' Accademia delle Scienze dell' anno 1709. dando l' estratto della Memoria sovraccenata di Parent, dopo aver detto, che Wallis fu il primo a far girare l' iperbola intorno al suo asse conjugato, ed a nominar *cilindroide* il solido generato con questo rivolgimento, avverte, che Parent riscontrò nel cilindroide di Wallis questa memorabile proprietà, che qualora i due assi conjugati dell' iperbola generatrice abbiano una certa proporzione con quelli d' uno sferoide compresso, inscritto al cilindroide, le superficie di questi due solidi saranno *continuamente* uguali, come lo sono quelle della sfera, e del cilindro circoscritto, vale a dire eguali non solamente nel loro tutto, ma ancora nelle loro parti corrisppndenti allorchè questi due corpi sono divisi in segmenti con piani perpendicolari al loro asse comune. Questo teorema, come dice Fontenelle, fu presentato da Parent nel 1697. all' Accademia, ma non ne fu mai pubblicata la dimostsazione. Il D' Alembert nell' articolo *Cilindroide* dell' Enciclopedia invita i suoi Lettori a ritrovarla. Ecco quella che a me si è presentata.

5. 44. Sia (Fig. 5.) dell' iperbola *AGO* il semiasse trasverso $CA = a$, il semiasse conjugato $CB = b$, l' ordinata *FG* all' asse conjugato $= y$, l' ascissa dal centro $CF = x$. La proprietà dell' iperbola dà $y^2 - a^2 : x^2 :: a^2 : b^2$, e quindi $y = \frac{a}{b} \sqrt{(b^2 + x^2)}$, e differenziando $\frac{axdx}{b \sqrt{(b^2 + x^2)}} = dy$. Dunque $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{[b^4 + (a^2 + b^2) x^2]}}{b \sqrt{(b^2 + x^2)}}$. Ma la superficie del cilindroide nato dal rivolgimento dello spa-

zio iperbolico $CAGF$ intorno a CB ha per espressione $\int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int \frac{2\pi a dx}{b^2} \sqrt{[b^4 + (a^2 + b^2)x^2]} = \int \frac{2\pi a dx \sqrt{(a^2+b^2)}}{b^2} \sqrt{\left(\frac{b^4}{a^2+b^2} + x^2\right)}$; e altronde si sa, che $\int dx \sqrt{(f+x^2)} = \ldots\ldots$ $\frac{1}{2} x \sqrt{(f + x^2)} + \frac{1}{2} f \, log. [x + \sqrt{(f+x^2)}] +$ *Cost.*; dunque la detta superficie sarà espressa da

$$\frac{\pi a \sqrt{(a^2 + b^2)}}{b^2} . x \sqrt{\left(\frac{b^4}{a^2 + b^2} + x^2\right)} + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \, log. \left[x + \sqrt{\left(\frac{b^4}{a^2 + b^2} + x^2\right)}\right] + Cost.$$

Si determina la *Cost.* con riflettere, che svaniscono insieme la superficie, e l'ascissa x, e ciò dà $Cost. = - \frac{\pi a b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \, log. \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$; conseguentemente la superficie del cilindroide sarà

$$\frac{\pi a x}{b^2} \sqrt{[b^4 + (a^2 + b^2)x^2]} + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \times log. \left[\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{b^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{x^2(a^2+b^2)}{b^4}\right)}\right]$$

$$= \pi a x \sqrt{\left[1 + \frac{(a^2+b^2)x^2}{b^4}\right]} + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \times log. \left[\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{b^2} + \sqrt{\left[1 + \frac{(a^2+b^2)x^2}{b^4}\right]}\right].$$

45. Venendo ora a quella dello sferoide inscritto al cilindroide, l'ellisse generatrice avrà lo stesso semiasse maggiore $AC = a$, che ha l'iperbola, e per semiasse conjugato ne avrà un altro che chiamo c, e chiamando y l'ordinata a questo second' asse, x l'ascissa dal centro, avremo per la proprietà dell'ellisse $y^2 : c^2 - x^2 :: a^2 : c^2$; e quindi

$y = \frac{a}{c} \sqrt{(c^2 - x^2)}$, $dy = \frac{-a x d x}{c \sqrt{(c^2 - x^2)}}$, $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{dx \sqrt{[c^4 + (a^2 - c^2) x^2]}}{c \sqrt{(c^2 - x^2)}}$. Dunque la superficie dell' ellissoide schiacciato, generato dal rivolgersi della predetta ellisse intorno all' asse minore, sarà $\int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int \frac{2\pi a dx}{c^2} \sqrt{[c^4 + (a^2 - c^2) x^2]} = \int \frac{2\pi a dx \sqrt{(a^2 - c^2)}}{c^2} \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2 - c^2} + x^2\right)}$ $= \frac{\pi a \sqrt{(a^2 - c^2)}}{c^2} . x \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2 - c^2} + x^2\right)} + \ldots$ $\frac{\pi a c^2}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \log. \left[x + \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2 - c^2} + x^2\right)}\right] + Cost.$, e perchè si annulla in un colla x anche la superficie dell' ellissoide, ne nasce $Cost. = - \ldots$ $\frac{\pi a c^2}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \log. \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 - c^2)}}$; con che si ottiene per la misura della superficie dell' ellissoide compresso l' espressione $\pi a x \sqrt{\left(1 + \frac{(a^2 - c^2) x^2}{c^4}\right)} + \frac{\pi a c^2}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \times$ $\log. \left[\frac{x \sqrt{(a^2 - c^2)}}{c^2} + \sqrt{\left[1 + \frac{(a^2 - c^2) x^2}{c^4}\right]}\right]$.

46. Paragono ora quest' espressione con quella della superficie del cilindroide, ed uguagliando l' una all' altra ritrovo $\frac{a^2 + b^2}{b^4} = \frac{a^2 - c^2}{c^4}$, ovvero anche $\frac{b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 - c^2)}}$; donde ottengo pel valore di c la seguente equazione $c^4 + \frac{b^4}{a^2 + b^2} . c^2 - \frac{a^2 b^4}{a^2 + b^2} = 0$, e di qui $c^2 = - \frac{\frac{1}{2} b^4}{a^2 + b^2}$ $\pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4} b^8}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^2 b^4}{a^2 + b^2}\right)} = - \ldots\ldots$

$\frac{\frac{1}{2}b^4 \pm b^2(a^2+\frac{1}{2}b^2)}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, e per ultimo $c = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

47. Da ciò apparisce, che *affinchè l'ellissoide schiacciato abbia la sua superficie continuamente uguale a quella del cilindroide circoscritto, l'asse maggiore dell'ellisse generatrice deve essere uguale all'asse trasverso dell'iperbola generatrice, e l'asse minore dell'ellisse uguale al prodotto de' due assi dell'iperbola diviso per la radice della somma de' loro quadrati.*

L'uguaglianza *continua* delle superficie di questi due solidi, vale a dire l'uguaglianza delle superficie curve di tutti i segmenti corrispondenti tagliati con piani perpendicolari all'asse di rotazione si raccoglie manifestamente dall'identità delle due preallegate espressioni, allorchè in entrambe si prende la medesima ascissa x.

48. Se vorrà trovarsi la solidità del cilindroide, basterà nella formola delle cubature $\int \pi y^2 dx$ sostituire il valore di y^2, cioè $a^2 + \frac{a^2x^2}{b^2}$, e si avrà per la detta solidità l'espressione $\pi a^2 x + \frac{\pi a^2 x^3}{3b^2}$. Sottratta poi questa dalla solidità del cilindro generato dal rivolgimento del rettangolo MF intorno a CF, cioè da $\pi y^2 x = \pi a^2 x + \frac{\pi a^2 x^3}{b^2}$, resta $\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi a^2 x^3}{b^2}$ per esprimere la solidità dell'anello iperbolico prodotto dal rivolgimento dello spazio iperbolico AGM intorno all'asse conjugato CB. Di qui apparisce, che quest'anello iperbolico sta all'emisfero avente per raggio l'altezza x dell'anello, come sta il quadrato dell'asse trasverso al quadrato dell'esse conjugato; che è il famoso teorema di Tacquet nel suo elegantissimo trattato *Cylindricorum et Annula.*

rium Lib. V. Prop. 41ª., e di questo suo ritrovato egli ebbe poi a dire sul fine della sua *Geometria Pratica*, Probl. 13º: *equidem fateor me hoc invento laetatum fuisse*.

49. Facendo fare allo spazio $GEAM$ un mezzo giro intorno all' ordinata MG, sicchè l' arco iperbolico AEG acquisti la posizione contraria $A'E'G$, cerco la solidità dell' altro anello iperbolico nato dalla rotazione dello spazio $A'E'GM$ intorno al predetto asse CB, cioè a dire la differenza fra il solido generato dallo spazio $CA'GF$, e il cilindro generato dal rettangolo $CMGF$. Meno a tal effetto la DE' parallela all' asse trasverso, e faccio, $CD = x$, $DE = y$, $DN = b$, e quindi $EN = E'N = b - y$, $DE' = 2b - y$. Ora abbiamo il cerchio di raggio $DN = \pi b^2$, il cerchio di raggio $DE' = \pi(2b - y)^2$, e perciò la zona generata dal rivolgimento di NE' intorno a $CB = \pi(2b - y)^2 - \pi b^2 = 3\pi b^2 - 4\pi by + \pi y^2$, e moltiplicando quest' espressione per dx, risulta per l' elemento del solido anulare nato dal rivolgimento dello spazio iperbolico $MA'E G$ la formola $3\pi b^2 dx + \pi y^2 dx - 4\pi bydx$, la quale, sostituendo ad y^2 il suo valore $a^2 + \frac{a^2x^2}{b^2}$, diventa $3\pi b^2 dx + \pi a^2 dx + \frac{\pi a^2 x^2 dx}{b^2} - 4\pi bydx$. L' integrale di questa formola, preso nel supposto di $x = MC = k$ dà la solidità dell' anello prodotto da tutto lo spazio $MA'E'G = 3\pi b^2 k + \pi a^2 k + \frac{\pi a^2 k^3}{3b^2} - 4\pi b\int ydx$. L' ultimo termine $4\pi b\int ydx$ di quest' espressione ci dà subito a divedere, che la cubatura del predetto anello dipende onninamente dalla quadratura dell' iperbola, cioè dello spazio $CAGF$. Di qui si scorge immediatamente la ragione, per cui dovettero riuscir vani tutti i tentativi fatti dal Tacquet di ridurre alla sola

sfera la solidità di quell'anello, confessando egli nella sua Geometria Pratica loc. cit. *venisse in spem fore ut alterum quoque annulare solidum, quod fit ab hyperbola* MA'E'G *circa eundem axem* CB, *ad sphaeram reducerem. Quo obtento, haberi quadraturam hyperbolae demonstravi. At me quidem hactenus spes ista fefellit.*

50. Che poi la riduzione di quel solido anulare alla sola sfera apra la strada alla quadratura dell'iperbola, viene da Tacquet dimostrato mediante la teoria del centro di gravità; ma senza questo, la formola precedente rende ciò manifesto immantinente. In fatti, supposto il detto anello uguale ad una sfera di raggio r, abbiamo l'equazione $\frac{4}{3}\pi r^3 = 3\pi b^2 k + \pi a^2 k + \frac{\pi a^2 k^3}{3b^2} - 4\pi b \int y dx$, e conseguentemente $\int y dx = CAGF = \frac{3}{4} bk + \ldots \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 k}{h} + \frac{1}{12} \cdot \frac{a^2 k^3}{hb^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{h}$, valore tutto algebraico, e libero dalla trascendente π.





ARTICOLO V.

Sopra alcuni Integrali determinati, *cioè presi dentro certi limiti assegnati.*

Teorema I.

51. $\int dx\, log.\, sen.\, x = \int dx\, log.\, cos.\, x$, qualora si piglino questi integrali da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$, posto $\pi =$ alla semicirconferenza del cerchio di raggio 1.

6. Dim. Sull' asse AB (Fig. 6.) $= \frac{1}{2}\pi$ si prenda l'ascissa indefinita $AP = x$, e si meni l'ordinata corrispondente $PR = log.\, sen.\, x$, e si descriva la curva MB, la quale avrà l' asintoto AS, perchè $log.\, 0 = -\infty$, e taglierà l'asse in B, perchè $log.\, sen.\, \frac{1}{2}\pi = log.\, 1 = 0$. Sarà dunque $\int dx\, log.\, sen.\, x$, preso da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$, uguale a tutta l'aja curvilinea $SABM$. Parimente sull' asse FH

7. (Fig. 7.) $= \frac{1}{2}\pi$ si pigli l'ascissa indefinita $FG = x$, e si guidi l'ordinata rettangolare $GI = log.\, cos.\, x$, descrivendo la curva FIL, la quale taglia l'asse nell' origine F delle ascisse, perchè $log.\, cos.\, 0 = log.\, 1 = 0$, ed ha nell' estremità H dell' asse un asintoto HO, perchè $log.\, cos.\, \frac{1}{2}\pi = log.\, 0 = -\infty$. Laonde tutta l'aja $LFHO = \int dx\, log.\, cos.\, x$ preso da $x = 0$

sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$. Ora se si prende $FG = BP$, anche GI risulta $= PR$; avvegnachè $PR = log. sen. AP = log. cos. (\frac{1}{2}\pi - AP) = log. cos. BP = log. cos. FG = GI$. E così potrà sempre dimostrarsi l'uguaglianza di tutte le ordinate corrispondenti a due a due nelle due Curve. Dunque le loro aje saranno eguali, e quindi $\int dx\, log. sen. x$, e $\int dx\, log. cos. x$ presi tra i mentovati limiti sono eguali. Il che era ec.

52. Cor. La curva BM dell'equazione $y = log. sen. x$ trovasi avere per raggio osculatore l'espressione semplicissima $\frac{1}{sen. x}$, la quale dà a conoscere, che il raggio osculatore in B, dove $x = \frac{1}{2}\pi$, è $= 1$, che è il minimo valore di $\frac{1}{sen. x}$; e ciò mostra, essere in B la massima curvatura. La curva poi FL, la quale non è altro che la prima roversciata, ha per raggio osculatore $\frac{1}{cos. x}$.

Teorema II.

53. $\int dx\, log. sen. x = \int dx\, log. cos. x = -\frac{1}{2}\pi\ log. 2$, prendendo gl'integrali fra i termini $x = 0$, ed $x = \frac{1}{2}\pi$.

Dim. E' proprietà notissima degli angoli crescenti nella progressione aritmetica de' numeri naturali senza fine, che la somma dei loro seni si ha con dividere il coseno del semiangolo primitivo per due volte il seno dello stesso, vale a dire $sen. x + sen. 2x + sen. 3x + sen. 4x + sen. 5x +$ ec. *in inf.* $=$

$\frac{\cos.\frac{1}{2}x}{2\,sen.\frac{1}{2}x}$. Moltiplico tutto per dx, ed ottengo $dx\,sen.\,x + dx\,sen.\,2x + dx\,sen.\,3x + dx\,sen.\,4x + dx\,sen.\,5x +$ ec. *in inf.* $= \frac{dx\cos.\frac{1}{2}x}{2\,sen.\frac{1}{2}x}$. Prendo ora l'integrale di quest' equazione, ed ho $-\cos.x - \frac{1}{2}\cos.2x - \frac{1}{3}\cos.3x - \frac{1}{4}\cos.4x - \frac{1}{5}\cos.5x -$ ec. $= \log.sen.\frac{1}{2}x + Cost.$ Per determinare la *Cost.*, faccio $x = 180^\circ = \pi$, il che cangia l'equazione in $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ ec. $= Cost.$ Ma è già noto, essere $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ ec. $= \log.2$. Dunque $Cost. = \log.2$, e conseguentemente $-\cos.x - \frac{1}{2}\cos.2x - \frac{1}{3}\cos.3x - \frac{1}{4}\cos.4x - \frac{1}{5}\cos.5x -$ ec. $= \log.sen.\frac{1}{2}x + \log.2$, ovvero trasponendo, e cangiando x in $2x$ avremo $\cos.2x + \frac{1}{2}\cos.4x + \frac{1}{3}\cos.6x + \frac{1}{4}\cos.8x + \frac{1}{5}\cos.10x +$ ec. $= -\log.sen.x - \log.2$. Moltiplico tutto per dx, e nasce $dx\cos.2x + \frac{1}{2}dx\cos.4x + \frac{1}{3}dx\cos.6x + \frac{1}{4}dx\cos.8x + \frac{1}{5}dx\cos.10x +$ ec. $= -dx\log.sen.x - dx\log.2$, il cui integrale è $\frac{1}{2}sen.2x + \frac{1}{8}sen.4x + \frac{1}{18}sen.6x + \frac{1}{32}sen.8x + \frac{1}{50}sen.10x +$ ec. $= -\int dx\log.sen.x - x\log.2 + Cost.$ Determino la costante con porre $x = 0$, il che rende nullo il primo membro dell'equazione, ed anche nell'omogeneo si annulla $x\log.2$ non meno che

$\int dx \log. sen. x$, perchè si suppone in questo Teorema, che l'integrale $\int dx \log. sen. x$ debba prendersi in modo, che si annulli allorchè si fa $x = 0$. Dunque anche la *Cost.* è zero, e però lequazione sarà semplicemente $\frac{1}{2} sen. 2x + \frac{1}{8} sen. 4x + \frac{1}{18} sen. 6x + \frac{1}{32} sen. 8x + \frac{1}{50} sen. 10x +$ ec. $= - \int dx \log. sen. x - x \log. 2$. Laonde pigliando ora $x = \frac{1}{2}\pi$, quest' equazione si trasforma in $0 = - \int dx \log. sen. x - \frac{1}{2}\pi \log. 2$, ovvero in $\int dx \log. sen. x = - \frac{1}{2}\pi \log. 2$ ogni qualvolta si prenda il detto integrale fra i due limiti di $x = 0$, e di $x = \frac{1}{2}\pi$. Il che era ec.

Scol. Questo Teorema è stato dimostrato da Eulero per una via intricata e lunghissima, ricavandolo da un suo metodo eccellente di ritrovare gli integrali delle formole differenziali per certi valori determinati della variabile. Qui si è da noi dimostrato colla massima brevità e semplicità.

Teorema III.

54. $\int dx \log. sec. x = \frac{1}{2}\pi \log. 2$, preso l' integrale fra i detti termini.

Dim. $\int dx \log. sec. x = \int dx \log. \frac{1}{cos. x} = - \int dx \log. cos. x = \frac{1}{2}\pi \log. 2$. Il che era ec.

Teorema IV.

55. $\int dx \, log. \, tang. \, x = 0$, preso l'integrale fra i predetti limiti.

Dim. $\int dx \, log. \, tang. \, x = \int dx \, log. \, \frac{sen. \, x}{cos. \, x} = \int dx \, (log. \, sen. \, x - log. \, cos. \, x) = \int dx \, log. \, sen. \, x - \int dx \, log. \, cos. \, x = -\frac{1}{2} \pi \, log. \, 2 + \frac{1}{2} \pi \, log. \, 2 = 0$. Il che era ec.

Teorema V.

56. $\int dx \, log. \, cot. \, x = 0$, pigliando l'integrale tra i detti limiti.

Dim. $\int dx \, log. \, cot. \, x = \int dx \, log. \, \frac{1}{tang. \, x} = - \int dx \, log. \, tang. \, x = 0$. Il che era ec.

Teorema VI.

57. $\int dx \, log. \, cosec. \, x = \frac{1}{2} \pi \, log. \, 2$.

Dim. $\int dx \, log. \, cosec. \, x = \int dx \, log. \, \frac{1}{sen. \, x} = - \int dx \, log. \, sen. \, x = \frac{1}{2} \pi \, log. \, 2$. Il che era ec.

Teorema VII.

58 $\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x = - \frac{1}{2} \pi \, log. \, 2 -$

$2\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}+\text{ec.}\right)$, prendendo sempre l'integrale dentro que' termini.

Dim. Nel raziocinio da noi fatto per dimostrare il Teorema II. si è fatto vedere, che $\cos. x + \frac{1}{2}\cos. 2x + \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{4}\cos. 4x + \frac{1}{5}\cos. 5x + \text{ec.} = -\log. \text{sen.} \frac{1}{2}x - \log. 2 = -\log. 2\,\text{sen.} \frac{1}{2}x = -\log. \sqrt{2(1-\cos. x)} = -\log. \sqrt{2\,\text{sen. vers.}\, x} = -\frac{1}{2}\log. 2 - \frac{1}{2}\log. \text{sen. vers.}\, x$; onde moltiplicando tutto per dx, ed integrando avremo $\text{sen.}\, x + \frac{1}{2^2}\text{sen.}\, 2x + \frac{1}{3^2}\text{sen.}\, 3x + \frac{1}{4^2}\text{sen.}\, 4x + \frac{1}{5^2}\text{sen.}\, 5x + \text{ec.} = -\frac{1}{2}x \log. 2 - \frac{1}{2}\int dx \log. \text{sen. vers.}\, x$ senza costante, perchè nel supposto presente che $\int dx \log. \text{sen. vers.}\, x$ si annulli quando $x = 0$, si annulla anche tutto il resto. Fatto poi $x = \frac{1}{2}\pi$, risulta $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{ec.} = -\frac{1}{4}\pi \log. 2 - \frac{1}{2}\int dx \log. \text{sen. vers.}\, x$ prendendo quest' integrale da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$. Perlocchè avremo $\int dx \log. \text{sen. vers.}\, x = -\frac{1}{2}\pi \log. 2 - 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \text{ec.}\right)$. Il che era ec.

59. Cor. La serie reciproca de' quadrati de' numeri dispari co' segni alternanti $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} -$

$\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} +$ ec. non è mai stata, ch' io sappia, nè da Eulero, nè da altri considerata, e qui si trova che ella è $= -\frac{1}{4}\pi \, log. \, 2 - \frac{1}{2}\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x$ pigliando l'integrale da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$. Si è sommata colla quadratura del cerchio la serie $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} +$ ec. allorchè n è dispari, ma non quando è pari. Ved. Eul. *Introd. in An. Inf.* tom. I.° §. 175., e *Remarq. sur un beau rapport etc. Mém. de l' Acad. de Berlin* ann. 1761. §. ultimo, e *Inst. Calc. Diff. Part.* II. §. 224.

Teorema VIII.

60. Se l' integrale $\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x$ si piglia poi da $x = 0$ sino ad $x = \pi$, allora risulta $\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x = -\pi \, log. \, 2$.

Dim. Per la dimostrazione del Teorema precedente si ha $sen. \, x + \frac{1}{2^2} sen. \, 2x + \frac{1}{3^2} sen. \, 3x + \frac{1}{4^2} sen. \, 4x + \frac{1}{5^2} sen. \, 5x +$ ec. $= -\frac{1}{2} x \, log. \, 2 - \frac{1}{2}\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x$ senza costante, perchè tutto si annulla insieme con x. Supponendo ora $x = \pi$; l' equazione si cangia in $0 = -\frac{1}{2}\pi \, log. \, 2 - \frac{1}{2}\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x$, ovvero $\int dx \, log. \, sen. \, vers. \, x = -\pi \, log. \, 2$. Il che era ec.

TEOREMA IX.

61. $\int dx\, log.\, sen.\, vers.\, x = \int dx\, log.\, sen.\, x = -\pi\, log.\, 2$, pigliando gl' integrali da $x = 0$ sino ad $x = \pi$.

DIM. Tenendo dietro alla dimostrazione del Teorema I. (51) è manifesto, che l'aja curvilinea rappresentante $\int dx\, log.\, sen.\, x$ qualora si fa $x = \frac{1}{2}\pi$, diviene per l'appunto doppia allorchè rappresenta $\int dx\, log.\, sen.\, x$ preso nel supposto di $x = \pi$. Dunque in quest'altro supposto è $\int dx\, log.\, sen.\, x = -\pi\, log.\, 2 = \int dx\, log.\, sen.\, vers.\, x$. Il che era ec.

62. COR. Si dimostra lo stesso anche di $\int dx\, log.\, cos.\, x$ preso da $x = 0$ sino ad $x = \pi$, ma conviene ammettere il principio da tanti contradetto, che i logaritmi de' numeri negativi sono uguali ai logaritmi degli stessi numeri positivi, giacchè è evidente, che oltreppassato il quadrante $\frac{1}{2}\pi$ diviene negativo $cos.\, x$, e $log.\, cos.\, x$ rappresenta il logaritmo d'un numero negativo.

63. SCOLIO I. Volendo descriversi la curva dell' aja $\int dx\, log.\, sen.\, vers.\, x$ si piglia una retta indefinita AG (Fig. 8.), e si divide in parti AB, BH, 8.
HC, $C\omega$, ωD, DP, PE, $E\varphi$, φF, FV, VG, ec. ciascuna eguale al quadrante della circonferenza circolare $\frac{1}{2}\pi$. Al primo quadrante AB corrisponde il ramo asintotico MB, perchè presa l'ascissa $x = 0$

l' ordinata diventa $log. sen. vers. x = log. o = -\infty$, e per l' ascissa $x = AB = \frac{1}{2}\pi$ l' ordinata è $log. sen. vers. x = log. 1 = o$. Il ramo positivo BN appartiene al secondo quadrante BH, essendo l' ascissa $x = AH = \pi$, e l' ordinata $HN = log. sen. vers. \pi = log. 2$. L' altro ramo positivo NC appartiene al terzo quadrante HC, avvegnachè all' ascissa $x = AC = \frac{3}{2}\pi$ appartiene l' ordinata $log. sen. vers. \frac{3}{2}\pi = log. 1 = o$. Finalmente il secondo ramo asintotico CS si riferisce al quarto quadrante $C\omega$, risultando per l'ascissa $x = A\omega = 2\pi$ l' ordinata $log. sen. vers. 2\pi = log. o = -\infty$. Proseguendo a questo modo per gli altri successivi quadranti senza fine si replica infinite volte la stessa curva. Intorno ad essa sono da notarsi le seguenti proprietà.

1.º Essa taglia l' asse AG in B, e C ad angolo semiretto, giacchè si sa, che posta l' ordinata $log. sen. vers. x = y$ la frazione $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell' angolo formato dalla curva colla retta parallela all' asse, ed essendo $dy = \frac{d. sen. vers. x}{sen. vers. x} = \frac{dx \, sen. x}{sen. vers. x}$, e però $\frac{dy}{dx} = \frac{sen. x}{sen. vers. x}$, quindi ne viene, che dove sia $x = \frac{1}{2}\pi$, ovvero $= \frac{3}{2}\pi$, risulta $\frac{dy}{dx} = 1$, ovvero $= -1$, vale a dire semiretto l' angolo indicato.

2.º Nel punto N corrispondente all' ascissa $AH = \pi$ la curva è parallela all' asse, perchè quivi $\frac{dy}{dx} = \frac{sen. \pi}{sen. vers. \pi} = o$.

3.° L'ordinata HN è la massima delle positive.

4.° L'aja asintotica $OMBA$ è $= -\frac{1}{2}\pi \log. 2 - 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{ec.}\right)$ pel Teor. VII.

5.° L'aja BHN è $= 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{ec.}\right) - \frac{1}{2}\pi \log. 2$; avvegnachè tutta l'aja $AOMBNH$ pel Teor. VIII. è $= -\pi \log. 2$, e da questa levando $AOMB = -\frac{1}{2}\pi \log. 2 - 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{ec.}\right)$ resta $BHN = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{ec.}\right) - \frac{1}{2}\pi \log. 2$.

6.° I rami asintotici della curva diventano, come è dovere, in un' infinita distanza dall' asse paralleli all' asintoto, perchè sebbene $\frac{dy}{dx} = \frac{sen.\ x}{sen.\ vers.\ x}$ si cangi in $\frac{0}{0}$ allorchè x è $= 0$, ovvero $= 2\pi$, differenziando però il numeratore e denominatore si trova $\frac{cos.\ x}{sen.\ x} = \infty$ allorchè x diventa $= 0$, oppure $= 2\pi$; il che mostra, che la tangente dell' angolo fatto dalla curva ad un' infinita distanza dall' asse colla parallela all' asse è infinita, e però retto quell' angolo, e in conseguenza è quivi la curva parallela all' asintoto.

7.° Essendo $dy = \frac{dx\ sen.\ x}{sen.\ vers.\ x}$, sarà, preso dx costante, $ddy = \frac{dx^2 cos.\ x\ sen.\ vers.\ x - dx^2 sen.\ x^2}{sen.\ vers.\ x^2}$ $= \frac{dx^2 cos.\ x\ (1 - cos.\ x) - dx^2 sen.\ x^2}{sen.\ vers.\ x^2} = \frac{dx^2 (cos.\ x - 1)}{sen.\ vers.\ x^2} = -\frac{dx^2}{sen.\ vers.\ x}$. Avremo dunque il raggio osculatore della curva $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$

$$= \frac{\left(dx^2 + \frac{dx^2\, sen.\, x^2}{sen.\, vers.\, x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 : sen.\, vers.\, x} = sen.\, vers.\, x \times \ldots$$

$$\left(\frac{sen.\, vers.\, x^2 + sen.\, x^2}{sen.\, vers.\, x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(sen.\, vers.\, x^2 + sen.\, x^2)^{\frac{3}{2}}}{sen.\, vers.\, x^2}$$

$$= \frac{(1 - 2\cos.\, x + \cos.\, x^2 + sen.\, x^2)^{\frac{3}{2}}}{sen.\, vers.\, x^2} = \frac{(2\, sen.\, vers.\, x)^{\frac{3}{2}}}{sen.\, vers.\, x^2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{sen.\, vers.\, x}} = \frac{4}{\sqrt{2\, sen.\, vers.\, x}} = \frac{4}{2\, sen.\, \frac{1}{2}x} =$$

$\frac{2}{sen.\, \frac{1}{2}x}$. Questa espressione semplicissima del raggio osculatore dà subito a divedere, che i due rami asintotici della curva hanno in un infinita distanza dall' asse, cioè dove $x = 0$, ed $x = 2\pi$ il raggio osculatore infinito, come esser dee. Ne' due punti, dove la curva taglia l'asse, e dove $x = \frac{1}{2}\pi$, ed $x = \frac{3}{2}\pi$, il raggio osculatore è $= 2\sqrt{2}$. Nel vertice della curva, dove $x = \pi$, il raggio osculatore trovasi $= 2$, che è il minimo di tutti, e però quivi la curvatura è massima.

64. Scolio II. Il Teorema IV., cioè che $\int dx\, log.\, tang.\, x$ preso da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$ è $= 0$, si dimostra elegantemente anche mediante la
9. descrizione della curva. In fatti si prenda (Fig. 9) la retta $AC = \frac{1}{2}\pi$, e si tagli per mezzo in B. Sull' ascissa $AF = x$ si alzi perpendicolarmente l'ordinata corrispondente $FG = log.\, tang.\, x$ e per tal modo al semiasse AB apparterrà il ramo asintotico MG della curva, giacchè sarà $AO = log.\, tang.\, 0 = log.\, 0 = -\infty$, e l'ordinata in B sarà $= log.\, tang.\, \frac{1}{4}\pi = log.\, 1 = 0$. Per l'altro semiasse BC trovasi l'altro ramo asintotico positivo BN, perchè si ha $CS = log.\, tang.\, AC =$

$log.\ tang.\ \frac{1}{2}\pi = log.\ \infty = \infty$. Se ora di quà e di là del punto di mezzo B si pigliano due rette uguali BF, BP, le ordinate FG, PQ si trovano sempre uguali e contrarie ne' due rami della curva; avvegnachè $FG = log.\ tang.\ AF = log.\ tang.\ (\frac{1}{4}\pi - BF)$ $= log.\ tang.\ (\frac{1}{4}\pi - BP) = log.\ cot.\ (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi + BP)$ $= log.\ cot\ (\frac{1}{4}\pi + BP) = log.\ \frac{1}{tang\ (\frac{1}{4}\pi + BP)} =$ $- log.\ tang.\ (\frac{1}{4}\pi + BP)$. Così all' opposto si ha l' ordinata $PQ = log.\ tang.\ AP = log.\ tang.\ (\frac{1}{4}\pi + BP)$. E ciò dimostrandosi di tutte le coppie di ordinate prese ad ugual distanza da B ne' due rami della curva, ne nasce la conseguenza, che lo spazio asintotico $AOMB$ sarà uguale, e di segno contrario allo spazio asintotico $BCSN$, e che conseguentemente sarà $\int dx\ log.\ tang.\ x = AOMBCSN = 0$. Questa curva taglia l' asse in B sotto un angolo di 63.° 27″ perchè essendo $y = log.\ tang.\ x$, e quindi $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{1}{tang.\ x\ cos.\ x^2} = \frac{1}{sen.\ x\ cos.\ x} = \frac{2}{sen.\ 2x}$, sarà nel caso di $x = \frac{1}{4}\pi$ l'espressione $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{sen.\ \frac{1}{2}\pi} = 2$, ed è noto dalle Tavole trigonometriche, che l'angolo avente la tangente doppia del raggio è a un di presso di 63.° 27′. Per ritrovare il raggio osculatore di questa curva ricorro alla nota formola $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ presa nell' ipotesi di dx costante; e perchè si è trovato $dy = \frac{2dx}{sen.\ 2x}$; e quindi ddy $= \frac{-4dx^2 cos.\ 2x}{sen.\ 2x^2}$, fatte le sostituzioni avremo $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = \frac{(4dx^2 + dx^2\ \overline{sen.\ 2x}^2)^{\frac{3}{2}} : \overline{sen.\ 2x}^3}{4dx^3\ cos.\ 2x : \overline{sen.\ 2x}^2} =$

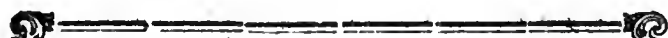
$\frac{(4+\overline{sen.\,2x}^2)^{\frac{3}{2}}}{4\,sen.\,2x\,cos.\,2x} = \frac{(4+\overline{sen.\,2x}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,sen\,4x}$. Da questo valore del raggio osculatore apparisce, che esso è infinito, cioè la curva ha una direzione rettilinea all'estremità de' rami asintotici, e siccome conviene, essendo ivi $x=0$, ovvero $x=\frac{1}{2}\pi$, e però $sen.\,4x = 0$. In *B*, dove la curva taglia l'asse, il raggio osculatore è $=\frac{(4+\overline{sen.\,\frac{1}{2}\pi}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,sen.\,\pi}=\infty$, cioè parimente infinito. Pe' punti *G*, e *Q* della curva, che corrispondono alle ascisse $AF=\frac{1}{8}\pi$, ed $AP=\frac{3}{8}\pi$ si trova il raggio osculatore $=$ .... $\frac{(4+\overline{sen.\,\frac{1}{4}\pi}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,sen.\,\frac{1}{2}\pi} = \frac{(4+\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{729}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{364\frac{1}{2}}$ pel punto *G*, ed $=\frac{(4+\overline{sen.\,\frac{3}{4}\pi}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,sen.\,\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{4}\sqrt{364\frac{1}{2}}$ per l'altro punto *Q*, dove si vede, che i due raggi osculatori risultano uguali, ma in direzione opposta, come esser debbono. Per trovar poi il minimo raggio osculatore, ovvero il punto della massima curvatura, differenzio l'espressione $\frac{(4+\overline{sen.\,2x}^2)^{\frac{3}{2}}}{4\,sen.\,2x\,cos.\,2x}$, ed uguaglio a zero il differenziale, con che ottengo l'equazione $\left[\frac{3}{2}(4+\overline{sen.\,2x}^2)^{\frac{1}{2}}\times 16.\,\overline{cos.\,2x}^2\,\overline{sen.\,2x}^2 + (8\,\overline{sen.\,2x}^2 - 8\,\overline{cos.\,2x}^2)\times \ldots (4+\overline{sen.\,2x}^2)^{\frac{3}{2}}\right] : \left[16\,\overline{sen.\,2x}^2\,\overline{cos.\,2x}^2\right] = 0$.

Da questa ricavo le due seguenti.

I°. $\sqrt{(4+\overline{sen.\,2x}^2)}=0$.

II° $3\,\overline{cos.\,2x}^2\;\overline{sen.\,2x}^2 + (\overline{sen.\,2x}^2 - \overline{cos.\,2x}^2)\times(4 + \overline{sen.\,2x}^2) = 0$,

la prima delle quali dà un valore immaginario di $sen.\,2x = 2\sqrt{-1}$, e la seconda mediante la sostituzione di $1 - \overline{sen.\,2x}^2$ in luogo di $\overline{cos.\,2x}^2$ si riduce a $\overline{sen.\,2x}^4 - 10.\,\overline{sen.\,2x}^2 + 4 = 0$, e dalla risoluzione di questa si ottiene $sen.\,2x = \sqrt{(5 - \sqrt{21})}$ $= 0{,}65$ a un di presso. Il punto adunque della massima curvatura corrisponde a quell' ascissa x, la quale dà $sen.\,2x = \frac{65}{100}$.



ARTICOLO VI.

Sopra l' integrazione dell' equazione fondamentale del Problema de' tre corpi.

65. È noto ai Geometri, che il famoso Problema de' tre corpi si riduce all' integrazione d'un' equazione differenziale di second' ordine di questa forma $\frac{ddy}{dx^2} + a^2y = X$, dove X è una funzione qualunque della x, essendo dx costante. Il metodo, che sembra il più spedito per giugnere all' intento, consiste nel moltiplicar l' equazione per $cos.\,ax$, con che si ha $\frac{ddy\,cos.\,ax}{dx} + a^2ydx\,cos.\,ax = Xdx\,cos.\,ax$. Integrando avremo $\frac{dy}{dx}\,cos.\,ax + \int ady\,sen.\,ax + ay\,sen.\,ax - \int ady\,sen.\,ax = \frac{dy}{dx}\,cos.\,ax + ay\,sen.\,ax = \ldots$ $\int Xdx\,cos.\,ax + A$. I.ª Moltiplico parimente la predetta equazione per $sen.\,ax$, ed ho $\frac{ddy}{dx}\,sen.\,ax +$

$a^2 ydx\,sen.\,ax = Xdx\,sen.\,ax$, ed integrando, $\frac{dy}{dx} sen.\,ax - \int ady\,cos.\,ax - ay\,cos.\,ax + \int ady\,cos.\,ax = \frac{dy}{dx} sen.\,ax - ay\,cos.\,ax = \int Xdx\,sen.\,ax + B$. II.ª Ora moltiplico la I.ª per $sen.\,ax$, la II.ª per $cos.\,ax$, e sottraggo il secondo prodotto dal primo, e con ciò ritrovo $ay = A\,sen.\,ax - B\,cos.\,ax + sen.\,ax \int Xdx\,cos.\,ax - cos.\,ax \int Xdx\,sen.\,ax$, e cangiando le costanti arbitrarie A, B avremo finalmente $y = A\,sen.\,ax + B\,cos.\,ax + \frac{1}{a} sen.\,ax \int Xdx\,cos.\,ax - \frac{1}{a} cos.\,ax \int Xdx\,sen.\,ax$.

66. Se $X = 0$, allora diventa $y = A\,sen.\,ax + B\,cos.\,ax$, siccome è già noto mediante l' integrazione dell' equazione $\frac{ddy}{dx^2} + a^2 y = 0$ di facilissimo maneggio.

67. Se $X = b$; allora $\int Xdx\,cos.\,ax = \frac{b}{a} sen.\,ax$, e $\int Xdx\,sen.\,ax = -\frac{b}{a} cos.\,ax$; dunque $y = A\,sen.\,ax + B\,cos.\,ax + \frac{b}{a^2}$.

68. Prendiamo ora l' equazione più generale della precedente, cioè affetta anche dalla prima differenza della y, che in quella mancava, e sia questa: $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{ady}{dx} + by = X$, il cui integrale dipende dalla risoluzione di quest' altra più semplice $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{ady}{dx} + by = 0$; onde incominceremo da quest' ultima. A quest' effetto stabilisco $y = Ae^{hx}$, essendo A, h costanti arbitrarie, ed ho $\frac{dy}{dx} =$

Abe^{bx}, $\frac{ddy}{dx^2} = Ab^2e^{bx}$, e questi valori sostituiti nella detta equazione la trasformano, dividendo tutto per Ae^{bx}, in $b^2 + ab + b = o$, da cui si ottiene $b = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)}$. Faccio $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)} = \omega$, ed a motivo del doppio valore di b, cioè $b = -\frac{1}{2}a + \omega$, ed $b = -\frac{1}{2}a - \omega$, avremo per l'integrale completo della detta equazione, essendo A, e B due costanti arbitrarie, $y = Ae^{-(\frac{1}{2}a - \omega)x} + Be^{-(\frac{1}{2}a + \omega)x}$. Intanto è facile il vedere, che per soddisfare alla proposta equazione $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{ady}{dx} + by = o$ basterà unicamente il valore $y = e^{-(\frac{1}{2}a - \omega)x}$, come si scorge dal sostituirvi questo valore, e i suoi differenziali primo e secondo.

69. Passo ora all'equazione proposta $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{ady}{dx} + by = X$. Faccio $y = uz$, e però $dy = udz + zdu$; $ddy = uddz + zddu + 2dzdu$. Sostituiti questi valori nella proposta, si ha la trasformata $u\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{adz}{dx} + bz\right) + \frac{2dudz}{dx^2} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{azdu}{dx} = X$, la quale per le due indeterminate u, e z si potrà sempre ripartire come meglio si crederà. Assumo pertanto $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{adz}{dx} + bz = o$, la quale essendo integrabile in tutti i casi possibili (§. 68.) ci farà conoscere z dato per una funzione di x. Rimane dunque l'altra equazione $\frac{2dudz}{dx^2} + \frac{zddu}{dx^2}$

$+ \frac{azdu}{dx} = X$, nella quale posto $du = pdx$ si ha $zpdz + zdp + azpdx = Xdx$, ovvero $dp + p\left(adx + \frac{2dz}{z}\right) = \frac{Xdx}{z}$, e questa non è che un caso particolare dell' equazione generica $dp + Mpdx = Ndx$, dove M, N sono funzione di x. E siccome l'integrale di tal equazione generica si sa essere $p = e^{-\int Mdx}\left(A + \int e^{\int Mdx} Ndx\right)$, fatto il paragone de' termini colla nostra, abbiamo $\int Mdx = ax + \log. z^2$, $e^{\int Mdx} = z^2 e^{ax}$; $N = \frac{X}{z}$; e conseguentemente $p = \frac{du}{dx} = \frac{e^{-ax}}{z^2}\left(A + \int e^{ax} Xzdx\right)$;

onde $u = B + \int \frac{e^{-ax}dx}{z^2}\left(A + \int e^{ax} Xzdx\right)$.

Ma $y = uz$; dunque $y = Bz + z\left(A\int \frac{e^{-ax}dx}{z^2} + \int \frac{e^{-ax}dx}{z^2}\int e^{ax} Xzdx\right)$. Trattasi ora di sostituire per z quel valore che soddisfa all' equazione $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{ady}{dx} + by = 0$, e che abbiamo veduto (§. 68.) essere $e^{-(\frac{1}{2}a - \omega)x}$. Ma qui convien distinguere tre casi: 1.° quando ω è una quantità reale, cioè $\frac{1}{4}a^2 > b$; 2.° quando $\omega = 0$, ovvero $\frac{1}{4}a^2 = b$; 3.° quando ω è immaginaria, ossia $\frac{1}{4}a^2 < b$.

70. Pel primo caso adunque, fatto $z = e^{-(\frac{1}{2}a - \omega)x}$, avremo $y = Be^{-(\frac{a}{2} - \omega)x} + e^{-(\frac{a}{2} - \omega)x}\left(A\int e^{-2\omega x}dx + \ldots \int e^{-2\omega x}dx \int e^{(\frac{a}{2} + \omega)x} Xdx\right)$. Ma . . $\int e^{-2\omega x}dx = -\frac{e^{-2\omega x}}{2}$; $\int e^{-2\omega x}dx \times \int e^{(\frac{a}{2} + \omega)x} Xdx = -\frac{e^{-2\omega x}}{2\omega}\int e^{(\frac{a}{2} + \omega)x} Xdx + \frac{1}{2\omega}\int e^{(\frac{a}{2} - \omega)x} Xdx$; dunque sarà $y = Be^{-(\frac{a}{2} - \omega)x} - \frac{A}{2\omega}\cdot e^{-(\frac{a}{2} + \omega)x} - \frac{e^{-(\frac{a}{2} + \omega)x}}{2\omega}\int e^{(\frac{a}{2} + \omega)x} Xdx + \ldots \frac{e^{-(\frac{a}{2} - \omega)x}}{2\omega}\int e^{(\frac{a}{2} - \omega)x} Xdx$.

71. Pel secondo caso, essendo $z = e^{-\frac{1}{2}ax}$, avremo subito $y = Be^{-\frac{1}{2}ax} + e^{-\frac{1}{2}ax}\left(A\int dx + \int dx \int e^{\frac{1}{2}ax} Xdx\right)$, cioè $y = Be^{-\frac{1}{2}ax} + e^{-\frac{1}{2}ax}\left(Ax + x\int e^{\frac{1}{2}ax} Xdx - \int e^{\frac{1}{2}ax} Xxdx\right)$

$$= e^{-\frac{1}{2}ax}\Big(B + Ax + x\int e^{\frac{1}{2}ax} X dx - \int e^{\frac{1}{2}ax} X x dx\Big).$$

72. Il terzo caso suppone ω immaginaria, ossia della forma $\omega\sqrt{-1}$, che sostituita nel valore di y del primo caso dà appunto $y = Be^{-\frac{ax}{2}} e^{\omega x\sqrt{-1}}$

$$- \frac{A}{2\omega\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{ax}{2}} e^{-\omega x\sqrt{-1}} - \ldots$$

$$\frac{e^{-\frac{ax}{2}} e^{-\omega x\sqrt{-1}}}{2\omega\sqrt{-1}} \int e^{\frac{ax}{2}} e^{\omega x\sqrt{-1}} X dx + \ldots$$

$$\frac{e^{-\frac{ax}{2}} e^{\omega x\sqrt{-1}}}{2\omega\sqrt{-1}} \int e^{\frac{ax}{2}} e^{-\omega x\sqrt{-1}} X dx.$$

E sicome dalla teoria degli esponenziali immaginarj si ha $e^{\pm \omega x\sqrt{-1}} = \cos.\omega x \pm \mathrm{sen}.\omega x.\sqrt{-1}$; perciò avremo $y = Be^{-\frac{ax}{2}}(\cos.\omega x + \mathrm{sen}.\omega x.\sqrt{-1})$

$$- \frac{A}{2\omega\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{ax}{2}}(\cos.\omega x - \mathrm{sen}.\omega x.\sqrt{-1}) -$$

$$\frac{e^{-\frac{ax}{2}}(\cos.\omega x - \mathrm{sen}.\omega x.\sqrt{-1})}{2\omega\sqrt{-1}} \times \ldots :$$

$$\int e^{\frac{ax}{2}} X dx(\cos.\omega x + \mathrm{sen}.\omega x.\sqrt{-1}) + \ldots$$

$$\frac{e^{-\frac{ax}{2}}(\cos.\omega x + \mathrm{sen}.\omega x.\sqrt{-1})}{2\omega\sqrt{-1}} \times \ldots$$

$$\int e^{\frac{ax}{2}} Xdx\,(\cos.\,\omega x - \text{sen.}\,\omega x \,.\, \sqrt{-1}) \ldots\ldots$$

$$= \left(B - \frac{A}{2\omega\sqrt{-1}}\right) e^{-\frac{ax}{2}} . \cos.\,\omega x + \ldots$$

$$\left(B\sqrt{-1} + \frac{A}{2\omega}\right) e^{-\frac{ax}{2}} . \text{sen.}\,\omega x + \ldots\ldots$$

$$\frac{e^{-\frac{ax}{2}}}{\omega} . \text{sen.}\,\omega x \int e^{\frac{ax}{2}} Xdx . \cos.\,\omega x - \ldots\ldots$$

$\frac{e^{-\frac{ax}{2}}}{\omega} . \cos.\,\omega x \int e^{\frac{ax}{2}} Xdx\ \text{sen.}\,\omega x$. Cangio la forma alle costanti arbitrarie, assumendo ..... $B - \frac{A}{2\omega\sqrt{-1}} = A'$, e $B\sqrt{-1} + \frac{A}{2\omega} = B'$, ed ottengo per ultimo $y = e^{-ax}\Big(A' \cos.\,\omega x$

$$+ B' \text{sen.}\,\omega x + \frac{\text{sen.}\,\omega x}{\omega} \int e^{\frac{ax}{2}} Xdx . \cos.\,\omega x - \ldots$$

$$\frac{\cos.\,\omega x}{\omega} \int e^{\frac{ax}{2}} Xdx\ \text{sen.}\,\omega x\Big).$$

73. Si sarebbe potuto integrare l' equazione del §. 65 $dy \cos.\,ax + aydx\,\text{sen.}\,ax = dx\int Xdx \cos.\,ax + Adx$ mediante un moltiplicatore idoneo P, funzione della sola x; onde avrebbesi $Pdy\cos.\,ax + Paydx\,\text{sen.}\,ax = Pdx\int Xdx \cos.\,ax + APdx$ nella quale il primo membro dovrà essere un differenziale completo, e conseguentemente si avrà $\left(\frac{d.\,P\cos.\,ax}{dx}\right) = \ldots$

$\left(\frac{d.\ Pay\ sen.\ ax}{dy}\right)$, cioè $\frac{d\ P.\ cos.\ ax}{dx} - a\ P\ sen.\ ax = a P\ sen.\ ax$, e quindi $\frac{dP}{P} = \frac{2 a dx\ sen.\ ax}{cos.\ ax}$, ed integrando $log.\ P = -\ 2 log.\ cos.\ ax$, e perciò $P = \frac{1}{cos.\ ax^2}$, che sostituito nell' equazione la trasforma in $\frac{dy}{cos.\ ax} + \frac{aydx\ sen.\ ax}{cos.\ ax^2} = \ldots\ldots\ldots \frac{dx}{cos.\ ax^2}\int X dx\ cos.\ ax + \frac{Adx}{cos.\ ax^2}$. Questa poi integrata diventa $\frac{y}{cos.\ ax} = \int \frac{dx}{cos.\ ax^2}\int X dx\ cos.\ ax + \frac{A\ tang.\ ax}{a} = \frac{tang.\ ax}{a}\int X dx\ cos.\ ax - \frac{1}{a}\int X dx\ sen.\ ax + \frac{A\ tang.\ ax}{a} + B$, e moltiplicando per $cos.\ ax$ nasce in fine $y = \frac{A}{a}\ sen.\ ax + B\ cos.\ ax + \frac{1}{a}\ sen.\ ax \int X dx\ cos.\ ax - \frac{1}{a}\ cos.\ ax \int X dx\ sen.\ ax$, come si era dianzi trovato.

Da ciò apparisce l'artifizio, di cui verisilmente deve essersi servito *Clairaut* nella sua *Teoria della Luna* Part. I. Art. III. §. 3. per integrare un'equazione affatto analoga a questa mediante il moltiplicatore qui da noi ritrovato.

74. Si può agevolmente applicare all'equazione $\frac{ddy}{dx^2} + a^2 y = X$ il bellissimo metodo del Sig. De la Grange, esposto negli Atti di Berlino pel 1775. pag. 190., per integrare qualunque equazione lineare dell' ordine n, della forma $Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{ddy}{dx^2} +$ ec. $+ V\frac{d^n y}{dx^n} = X$, dove P, Q, R, ec. V, ed X sono funzioni di x, supponendosi noto

l'integral completo di quest' equazione nel caso di $X = 0$, il quale sarà necessariamente di questa forma $y = Ap + Bq + Cr +$ ec., essendo A, B, C, ec. costanti arbitrarie in numero di n, e p, q, r, ec. funzioni di x, dove non entrano le dette costanti, e che sono tanti valori particolari di y nell' ipotesi di $X = 0$.

75. Consiste il detto metodo nel riguardare le arbitrarie A, B, C, ec. come variabili indeterminate, e suppor nulle nei valori di dy, ddy, d^3y, ec., $d^{n-1}y$ le parti, che dipendono dalla variabilità di queste quantità A, B, C; con che si avranno le seguenti equazioni:

$$dy = Adp + Bdq + Cdr + \text{ec.}$$
$$0 = pdA + qdB + rdC + \text{ec.}$$
$$ddy = Addp + Bddq + Cddr + \text{ec.}$$
$$0 = dpdA + dqdB + drdC + \text{ec.}$$
$$d^3y = Ad^3p + Bd^3q + Cd^3r + \text{ec.}$$
$$0 = ddpdA + ddqdB + ddrdC + \text{ec.}$$
$$d^4y = Ad^4p + Bd^4q + Cd^4r + \text{ec.}$$
$$0 = d^3pdA + d^3qdB + d^3rdC + \text{ec.}$$
ec.
$$d^{n-1}y = Ad^{n-1}p + Bd^{n-1}q + Cd^{n-1}r + \text{ec.}$$
$$0 = d^{n-2}pdA + d^{n-2}qdB + d^{n-2}rdC + \text{ec.}$$

Poscia

$$d^ny = Ad^np + Bd^nq + Cd^nr + \text{ec.}$$
$$+ d^{n-1}pdA + d^{n-1}qdB + d^{n-1}rdC + \text{ec.}$$

In questa maniera si vede, che le espressioni di y, dy, ddy, ec. $d^{n-1}y$ hanno la stessa forma, che avrebbero qualora A, B, C, ec. fossero costanti, e che l'espressione di d^ny non differisce da ciò che ella sarebbe in questo caso se non per li termini $d^{n-1}pdA + d^{n-1}qdB + d^{n-1}rdC +$ ec.,

che vi sono aggiunti. Ora siccome nel caso di A, B, C, ec. costanti, i valori di y, dy, ddy, ec. $d^n y$ soddisfanno per l'ipotesi all'equazione proposta allorchè vi si suppone $X = 0$, qualunque altronde esser possano i valori di queste costanti; di qui è facile argomentare, che sostituendosi in quell'equazione i valori predetti di y, dy, ddy, ec. $d^n y$, tutti i termini si distruggeranno, ad eccezione de' termini del valore di $d^n y$, che dipendono dalla variazione delle quantità A, B, C, ec., e del termine X, che prima si era supposto nullo. Conseguentemente si avrà l'equazione

$$d^{n-1}pdA + d^{n-1}qdB + d^{n-1}rdC + \text{ec.} = Xdx^n,$$

e quest'equazione essendo combinata colle $n-1$ equazione di condizione

$$\begin{aligned} pdA + qdB + rdC + \text{ec.} &= 0 \\ dpdA + dqdB + drdC + \text{ec.} &= 0 \\ ddpdA + ddqdB + ddrdC + \text{ec.} &= 0 \\ d^3pdA + d^3qdB + d^3rdC + \text{ec.} &= 0 \\ \text{ec.} & \end{aligned}$$

$$d^{n-2}pdA + d^{n-2}qdB + d^{n-2}rdC + \text{ec.} = 0,$$

se ne dedurranno colle regole ordinarie dell'eliminazione i valori delle n differenziali dA, dB, dC, ec.; e da questi mediante l'integrazione si avranno quelli di A, B, C, ec., i quali sostituiti nell'espressione di $y = Ap + Bq + Cr +$ ec. danno l'integrale completo dell'equazione proposta.

76. Applicando questo metodo alla nostra equazione $\frac{ddy}{dx^2} + a^2 y = X$, osservo prima, che l'integral completo di essa, allorchè si suppone $X = 0$, è $y = A\,sen.\,ax + B\cos.\,ax$ (§. 66.). Supposta pertanto la variabilità delle arbitrarie A, e B, ne ritraggo le due equazioni

$$dA\,sen.\,ax + dB\,cos.\,ax = 0\,,$$
$$adA\,cos.\,ax - adB\,sen.\,ax = Xdx\,.$$

Per ottener da queste i valori di dA, e dB, coll' eliminazione, moltiplico la prima per $a\,cos.\,ax$, e la seconda per $sen.\,ax$ sottraendola dalla prima; il che mi dà $adB = -Xdx\,sen.\,ax$, ovvero I.ª $dB = -\frac{1}{a}Xdx\,sen.\,ax$. Sostituisco questo valore di dB nella prima, e dividendo per $sen.\,ax$ ne ricavo II.ª $dA = \frac{1}{a}Xdx\,cos.\,ax$. L' integrale di questa II.ª mi dà $A = \frac{1}{a}\int Xdx\,cos.\,ax + A'$, e l' integrale di quella I.ª è $B = -\frac{1}{a}\int Xdx\,sen.\,ax + B'$. Sostituisco questi valori nell' equazione $y = A\,sen.\,ax + B\,cos.\,ax$ ed ho per l' integrale completo, che si cerca, l' equazione $y = A'\,sen.\,ax + B'\,cos.\,ax + \ldots$ $\frac{1}{a}\,sen.\,ax\int Xdx\,cos.\,ax - \frac{1}{a}\,cos.\,ax\int Xdx\,sen.\,ax$, come al §. 65.



ARTICOLO VII.

Sopra la determinazione del centro di pressione ne' fondi delle botti poste orizontalmente.

77. È cosa assai rimarchevole, che anche in molti oggetti comuni e triviali di economia domestica, qualora si voglia stare a certa precisione e rigore, non si possa fare a meno di ricorrere all'Analisi Infinitesimale, la quale pare altronde riservata alle sole sublimi speculazioni, ed agli oggetti più elevati, e più rimoti degli usi ordinarj della vita. Tra gli altri abbiamo di ciò un esempio singolare nelle botti, che orizontalmente situate e piene di liquore fossero in pericolo di sfiancarsi ne' loro fondi per la preponderanza della pressione del detto liquore sulla resistenza delle commessure e legami che essi hanno col restante della botte; e per cui si trattasse di trovare quel punto, che deve essere puntellato con qualche palo o sostegno esteriormente applicato, onde equilibrare o superare la detta pressione. Un tal punto, che si chiama il *centro di pressione*, è quello, per cui passa la risultante di tutte le pressioni esercitate contro tutti i punti del fondo della botte, ed è in conseguenza quel punto, a cui deve essere applicato esteriormente il puntello per impedire lo sfiancamento del fondo.

78. Il metodo di ritrovare questo punto è affatto simile a quello di ritrovare il centro di gravità nelle figure piane. Se per l'estremità superiore del diametro verticale del fondo della botte si guida una tangente, e questa si prende per l'asse de'

momenti, egli è manifesto per li principj di Statica, che il momento della risultante delle pressioni, ossia la somma di tutte le pressioni moltiplicata per la distanza del centro di pressione dal detto asse deve essere uguale alla somma de' momenti di ciascuna pressione elementare, ovvero alla somma de' prodotti di ciascheduna pressione elementare moltiplicata per la distanza dell'elemento premuto dall' asse mentovato. Dal che ne viene, che se si divide la somma de' momenti per la somma delle pressioni, il quoziente dà la distanza del centro di pressione dall'asse, cioè la precisa situazione di detto punto.

79. Chiamo pertanto a l'altezza del punto più elevato del ventre delle botte sopra l'estremità superiore del diametro verticale del fondo che si suppone circolare, r il semidiametro del fondo stesso, x l'ascissa computata dal termine superiore del detto diametro verticale, y l'ordinata orizzontale corrispondente; con' che sarà $2ydx$, ovvero $2dx\sqrt{(2rx - xx)}$ l'elemento del piano circolare, e moltiplicando questo elemento per la gravità specifica del liquore premente, che diremo 1, e per la sua distanza $a + x$ dal punto più alto del fluido, avremo $2(a + x)ydx$ per la pressione sofferta dall' elemento, e quindi $\int(a + x)2ydx$ per la somma delle pressioni contro il segmento circolare superiore sotteso dalla corda $2y$, il qual segmento si darà Σ. L'equazione del cerchio differenziata dà $rdx - xdx = ydy$, ovvero $xdx = rdx - ydy$, e sostituito questo valore nella formola $\int(a + x)2ydx$, questa si cangia in $a\int 2ydx + r\int 2ydx - \int 2y^2dy$ $= (a + r)\Sigma - \frac{2}{3}y^3 + Cost. =$ alla pressione

contro il segmento circolare Σ; e siccome questa pressione svanisce insieme col segmento, cioè quando $\Sigma = 0$, ed $y = 0$; si ha perciò $Cost. = 0$, e conseguentemente la detta pressione $= (a + r)\Sigma - \frac{2}{3}y^3$, la quale per tutta l'area A del cerchio, a motivo di $y = 0$, diventa $(a + r)A$.

Se poi la pressione elementare $2(a + x)ydx$ si moltiplica per la distanza x dell'elemento dall' asse de' momenti, nasce $(ax + xx)2ydx$ pel momento della pressione elementare, ed integrando si ha $\int(ax + xx)2ydx$ per la somma de' momenti di tutte le pressioni elementari esercitate dal fluido contro il segmento circolare Σ. Sostituendo, come dianzi, il valore di xdx, risulta $\int(ax + xx)2ydx = ar\int 2ydx - \int 2ay^2dy + 2\int x^2ydx = ar\Sigma - \frac{2}{3}ay^3 + 2\int x^2dx\sqrt{(2rx - x^2)}$. Per trovare il valore dell' integrale $\int x^2dx\sqrt{(2rx - xx)}$ ricorro al teorema, che si ricava dal Calcolo Integrale, $\int x^m dx(ax + bx^2)^n = \frac{x^{m-1}(ax + bxx)^{n+1}}{(m + 2n + 1)b} - \frac{(m + n)a}{(m + 2n + 1)b}\int x^{m-1}dx(ax + bxx)^n$, dove posto $m = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $a = 2r$, $b = -1$ si ottiene $\int x^2dx\sqrt{(2rx - xx)} = -\frac{1}{4}x(2rx - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{4}r\int xdx\sqrt{(2rx - xx)} = -\frac{1}{4}xy^3 + \frac{5}{4}r\int y(rdx - ydy) = -\frac{1}{4}xy^3 - \frac{5}{12}ry^3 + \frac{5}{8}r^2\Sigma + Cost.$ Laonde la somma de' momenti delle pressioni contro

il segmento Σ sarà $\left(ar + \frac{5}{4}r^2\right)\Sigma - \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}r\right)y^2$, senza costante, perchè svanisce la somma de' momenti allo svanire di Σ, e di y. Mutando poi, per tutta l'area circolare, il Σ in A, ed y in zero, abbiamo $\left(ar + \frac{5}{4}r^2\right)A$ per la somma de' momenti delle pressioni contro tutto il piano circolare. Perlocchè divisa questa somma per quella delle pressioni $(a + r)A$, si avrà $\frac{(ar + \frac{5}{4}r^2)A}{(a + r)A} = r + \frac{\frac{1}{4}r^2}{a + r}$ per la distanza del centro di pressione dall'estremità superiore del diametro verticale, che è quanto dire, *che il centro di pressione si trova sul diametro verticale al di sotto del centro del fondo circolare della botte per un tratto eguale ad un quarto della linea terza proporzionale al semidiametro del ventre della botte, e al semidiametro del fondo*. Il che era ec.

80. Cor. 1. Se il fluido premente non si alza al di sopra dell'estremità superiore del diametro verticale del fondo, e conseguentemente diventa $a = 0$; allora il centro di pressione si trova sotto il centro dal cerchio per un intervallo eguale ad un quarto del raggio.

81. Cor. 2. Se si vuol sapere quanta debba essere l'altezza a del liquore sopra l'estremità superiore del diametro verticale, affinchè il centro di pressione caschi ad una data distanza $\frac{r}{n}$ sotto il centro del cerchio; basterà fare $\frac{r^2}{4(a+r)} = \frac{r}{n}$, dal che si ha $4a + 4r = nr$, ed $a = \frac{(n-4)r}{4}$. Così affinchè il centro di pressione sia discosto dal centro

del cerhio per un sòlo centèsimo del raggio, dovrà essere a uguale a venti quattro volte il raggio.

82. Cor. 3. E se all'opposto il liquore si alza in infinito sopra il punto più elevato del diametro verticale del fondo, sicchè sia $a = \infty$; allora il centro di pressione coincide col centro stesso del cerchio.

83. Scol. La pressione $(a + r)A$ contro il fondo della botte si trova immantinente per un teorema notissimo d'Idrostatica, che la pressione esercitata da un fluido contro una superficie qualunque è uguale al peso di un volume del fluido, che risulta dal moltiplicare la superficia premuta per la distanza del suo centro di gravità dalla superficie del fluido premente.



ARTICOLO VIII.

Sulla dispersione de' raggi di luce eterogenei, ovvero diversamente colorati.

84. Intorno alla legge, con cui si *separano* gli uni dagli altri i raggi di luce di diversa specie allorchè nel passare da un mezzo in un altro di densità differente si torcono dal primo cammino, ovvero si rifrangono, tre ipotesi sono state immaginate da tre sommi uomini, Newton, Eulero, Clairaut. Nessuna di queste si accorda colle sperienze, e più delle altre se ne allontana quella di Newton, la quale è anzi totalmente appoggiata ad un esperimento erroneo, che ingannò questo grand' Uomo, e ritardò per lungo tempo il progresso dell' Ottica, cioè di quella Scienza, che può dirsi poco meno che creata da lui.

85. Il rapporto della refrazione (*a*) de' raggi *medii* nel passare dall' aria in un dato mezzo rifrangente sia espresso da $m:1$, e quello de' raggi *estremi*, cioè violetti sia $M:1$. Nel passaggio poi dall' aria ad un altro mezzo diverso dal primo il detto rapporto per li raggi *medii* sia $n:1$, e per gli *estre.* $N:1$. Ciò premesso, il rapporto $M-m:N-n$ è quello che si chiama il *rapporto della dispersione de' colori*. Qui è da notarsi, che essendo $M-m$, ed $N-n$ quantità molto picciole, possono rappresentarsi co' differenziali dm, dn, vale a dire $M-m=dm$, ed $N-n=dn$.

(*a*) Per rapporto della refrazione s' intende il rapporto del seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo di refrazione.

I.

Ipotesi di Newton.

86. Secondo Newton sta $m-1:M-1::n-1:N-1$; donde segue $m-1:M-m::n-1:N-n$, vale a dire $m-1:n-1::M-m:N-n::dm:dn$. Questa proposizione è appoggiata al seguente esperimento:
10. EAF (Fig, 10) è un vaso prismatico pieno d'acqua, entro cui è collocato un prisma di vetro CBD coll'angolo rifrangente B rivolto all'insù. Un raggio di luce GH viene a rompersi in H, in I, in K, ed in L, andando per HI, IK, KL, LM. Per li punti H, I, K, L si guidano alle superficie rifrangenti i perpendicoli Pp, PQ, QR, Rr. Il rapporto della refrazione de' raggi *medii* dall'aria nell'acqua sia $m:1$, dal vetro nell'aria $1:n$, e conseguentemente dal vetro nell'acqua sarà $m:n$. Denomino per brevità gli angoli GHp, ECB, CBD, BDF, MLr unicamente colle lettere H, C, B, D, L dei loro vertici. Suppongo, che gli angoli fatti dal raggio coi perpendicoli alle superficie rifrangenti sieno molto piccioli, sicchè possano supporsi a un dipresso proporzionali ai loro seni. Sarà pertanto $PHI = \frac{1}{m}H$, e $PIH = TPH - PHI = C - \frac{1}{m}H$. Di qui viene $QIK = \frac{m}{n}PIH = \frac{m}{n}C - \frac{1}{n}H$, ed $IKQ = B - QIK = B - \frac{m}{n}C + \frac{1}{n}H$. Inoltre $RKL = \frac{n}{m}IKQ = \frac{n}{m}B - C + \frac{1}{m}H$, ed $RLK = D - RKL = D - \frac{n}{m}B + C - \frac{1}{m}H$; onde finalmente $L = m.RLK = mD - nB + mC - H$. Ora il raggio incidente GH, e l'emergente ML prolungati, quel-

lo in HVZ, questo in $LVXY$ formano l'angolo HVX che diremo V, uguale a $PHV - HYX$; ed HYX, ovvero $SYL = NSR - SLV = A - L$; ond'è $V = PHV + L - A = H + L - A$, e sostituendo il valor trovato di L, si offre $V = m(D + C) - nB - A$. Ma $D + C = A + B$, perchè ciascuna di queste coppie forma quattro retti co' due angoli ACB, ADB. Dunque $V = m(A + B) - nB - A = (m - 1)A - (n - m)B$.

Per li raggi *estremi*, o violetti, nominando $M : 1$ il rapporto della refrazione dall' aria nell' acqua, ed $N : 1$ dall'aria nel vetro, sarà per questi l'angolo $V = (M - 1)A - (N - M)B$.

Se pertanto i raggi *medii* emergenti dal prisma nell' aria risultano paralleli ai raggi violetti emergenti, allora restando lo stesso per le due specie di raggi l'angolo V, nasce l' equazione $(m - 1)A - (n - m)B = (M - 1)A - (N - M)B$, dalla quale si deduce $(M - m)(A + B) = (N - n)B$, e quindi l' analogia $B : A + B :: M - m : N - n :: dm : dn$.

Ora nell' esperimento di Newton, che è l' ottavo della proposizione terza libro I. part. II. della sua Ottica, nel raggio emergente LM riusciva parallelo all' incidente GH; e però $V = 0$, e conseguentemente $(m - 1)A - (n - m)B = 0$, vale a dire $B : A :: m - 1 : n - m$, e quindi $B : A + B :: m - 1 : n - 1 :: dm : dn$. Dal che apparisce, che la Teria di Newton sulla dispersione de' raggi diversamente colorati è un' immediata conseguenza di quell' esperimento, il quale però fu scoperto da Dollond insussistente, e quindi anche fallace la conseguenza.

87. Il Sig. Hennert nel tomo sesto del suo Corso di Matematica §. 417. chiamando $R : 1$ il rapporto della refrazione de' raggi rossi, $V : 1$ de' violetti, ed avvertendo, che l' ipotesi Newtoniana

conduce necessariamente all'analogia $\frac{1}{R} - 1 : \frac{1}{V} - 1 :: R - 1 : V - 1$, da questa egli ne trae l'equazione $\frac{R}{V} - R - \frac{1}{V} = \frac{V}{R} - V - \frac{1}{R}$, *ovvero*, dic' egli; $R^2 - R = V^2 - V$, *e quindi* $R = V$; *che è assurdo, giacchè ne verrebbe, che i raggi rossi sarebbero egualmente refrangibili che i violetti.*

Ma fatto sta, che l'equazione $\frac{R}{V} - R - \frac{1}{V} = \frac{V}{R} - V - \frac{1}{R}$ in vece di dare l'altra voluta dal Sig. Hennert $R^2 - R = V^2 - V$ genera questa notabilmente diversa $R^2 - R - R^2 V = V^2 - V - V^2 R$.

Può vedersi nella Memoria di Eulero sopra *la legge di refrazione de' raggi di differenti colori* negli Atti dell' Accademia di Berlino per l'anno 1753., in qual maniera egli impugna col puro calcolo analitico l'ipotesi di Newton. Convien però confessare, che gli argomenti di Eulero non sono senza replica, e che la rovina di quell'ipotesi non è opera loro. Si veggano intorno a ciò le ingegnose riflessioni di D'Alembert nel terzo tomo de' suoi *Opuscoli Matematici* §. 873.

II.

Ipotesi di Eulero.

88. Per ritrovare la relazione fra m ed M, come pure fra n ed N Eulero stabilisce i seguenti postulati: 1.° N sarà espresso per n nella stessa maniera che M lo sarà per m: 2.° Se $m = 1$, anco M dee riuscire $= 1$, perchè allora i due mezzi so.

no i medesimi, e non vi ha refrazione. 3.° Se in vece di m si pone $\frac{1}{m}$, l'espressione analitica, che dà M per m, dee trasformarsi in $\frac{1}{M}$: avvegnachè allora i raggi vanno dal secondo mezzo nel primo, ed il loro cammino è lo stesso, come dal primo mezzo nel secondo. 4.° Se si ponesse mn in luogo di m, anco l'espressione di M dee càmbiarsi in MN. A tutte queste condizioni si soddisfa ogni qual volta si fa N uguale a quella stessa potenza di M, alla quale deve elevarsi m per ottenere n, cioè a dire con assumere $n = m^{\alpha}$, ed $N = M^{\alpha}$.

Da ciò immediatamente si ricava il rapporto $M - m : N - n$, ovvero $dm : dn$. Imperciocchè dall'equazione $n = m^{\alpha}$ presi i logaritmi abbiamo $\alpha = \frac{log. n}{log. m}$. Oltracciò $d. log. n = \frac{dn}{n}$, e $d. \alpha \, log. m = \frac{\alpha dm}{m} = \frac{dm}{m} \cdot \frac{log. n}{log. m}$; e però essendo $d. log. n = d. \alpha \, log. m$, sarà pure $\frac{dn}{n} = \frac{dm}{m} \cdot \frac{log. n}{log. m}$, ovvero $dm : dn :: m \, log. m : n \, log. n$.

89. In questa Teoria scontrasi l'errore, o per lo meno l'affatto gratuito supposto nella stessa prima condizione, cioè che debba darsi un'equazione generale e comune fra M, ed m, del pari che fra N, ed n. Non dipende M unicamente da m, ma ben anco da altre cose, forse neppur suscettibili di espressione matematica.

III.

Ipotesi di Clairaut.

90. Supposta la forza attrattiva dei mezzi, si nomini g la velocità d'una particella di luce nell' istante ch'ella entra nella sfera di attività del mezzo rifrangente; I l'angolo fatto in quell' istante dal raggio incidente con una perpendicolare alla superficie rifrangente; a la distanza, in cui comincia l'azion della forza, dalla detta superficie; x la distanza da questa superficie, alla qual distanza si suppone il corpuscolo arrivato in un certo tempo scorso dopo quel primo istante dell' ingresso nella sfera di attività; v la velocità del corpuscolo in questa distanza; X la forza attrattrice in tal distanza, risultante dall' azione combinata dei due mezzi sul corpuscolo; φ l'angolo formato dalla direzione del raggio in questo luogo colla perpendicolare alla superficie del mezzo rifrangente. Ora risolvendo la velocità v del corpuscolo nelle due velocità, una parallela alla superficie rifrangente, l'altra perpendicolare, è manifesto, che questa seconda risulta $= v \cos. \varphi$, e che questa sola viene alterata dall' azione della forza attrattrice, la quale si esercita perpendicolarmente a detta superficie, rimanendo al contrario intatta la prima velocità $v \, sen. \varphi$. Con ciò il principio delle forze acceleratrici ci somministra l'equazione $-Xdx = v \cos. \varphi \, d. v \cos. \varphi$, ovvero $-2Xdx = 2v \cos. \varphi \, d. v \cos. \varphi$, la quale integrata dà $-2\int Xdx = v^2 \cos. \varphi^2 + Cost.$ Per determinar la costante, osservo, che nel momento dell' ingresso del corpuscolo di luce nella sfera d'attività, la velocità v si cangia in g, l'angolo φ in I, e l'integrale $\int Xdx$,

che è sempre una funzione di x, diventa una funzione di a, che diremo A; con che avremo $Cost. = -2A - g^2 cos. I^2$. Sarà dunque la nostra equazione $2A - 2\int X dx = v^2 cos. \varphi^2 - g^2 cos. I^2$.

Suppongo ora, che il corpuscolo entrato appena nel mezzo rifrangente conservi quivi la velocità h, e la direzione del raggio faccia ivi colla perpendicolare alla superficie del mezzo l'angolo R, e che l'integrale $\int X dx$, posto in esso $x = o$, si trasformi in B; ed allora la predetta equazione si cangia in $2(A - B) = h^2 cos. R^2 - g^2 cos. I^2 = h^2 - g^2 - h^2 sen. R^2 + g^2 sen. I.^2$ Ma l'inalterabilità della velocità del raggio in direzion parallela alla superficie rifrangente porta seco l'equazione $h sen. R = g\, sen. I$, e conseguentemente $2(A - B) = h^2 - g^2$, e per ultimo $\frac{h}{g} = \frac{sen. I}{sen. R} = \sqrt{\left[1 + \frac{2(A-B)}{g^2}\right]}$, che mostra l'invariabilità del rapporto della refrazione, cioè di $\frac{sen. I}{sen. R}$.

Posto dunque $\sqrt{\left[1 + \frac{2(A-B)}{g^2}\right]} = m : 1$ ne' raggi medii, ne deriva $(m^2 - 1)g^2 = 2(A - B)$, e differenziando nasce $gdg(m^2 - 1) + g^2 mdm = o$, ovvero $dm = -\frac{(m^2-1)}{m} \cdot \frac{dg}{g}$. In un altro mezzo differente avremo pe' raggi medii $\sqrt{\left[1 + \frac{2(A-B)}{g^2}\right]} = n : 1$, e quindi $(n^2 - 1)g^2 = 2(A - B)$, e differenziando, come prima, $dn = -\frac{(n^2-1)}{n} \cdot \frac{dg}{g}$. Laonde il *rapporto della dispersione de' colori*, cioè $dm : dn$ verrà espresso da $\frac{m^2-1}{m} : \frac{n^2-1}{n}$. Ma anche questo rapporto, non meno che gli altri due, pre-

cedentemente dedotti dalle Teorie di Newton, ed Eulero discordano dall'esperienza, per modo, che bastantemente palesano l'insussistenza dalle medesime. In fatti Dollond trovò pel vetro comune il rapporto mezzano di refrazione $m:1 = 1,53:1$; e pel vetro *flint* $n:1 = 1,58:1$; ed il rapporto di dispersione $dm:dn = 2:3$. Laddove essere dovrebbe

secondo Newton

$$dm:dn::m-1:n-1::1:1,1094$$

secondo Eulero

$$dm:dn::m\,log.\,m:n\,log.\,n::1:1,111$$

secondo Clairaut

$$dm:dn::\frac{mm-1}{m}:\frac{nn-1}{n}::1:1,0804$$

IV.

Calcolo dell'esperimento di Dollond con due prismi di diverso vetro.

91. Dollond prese un prisma di vetro comune con un angolo rifrangente di 30 gradi, ed uno di *flint* con un angolo di 19 gradi, congiunse l'uno coll'altro, e trovò l'immagine solare senza colori, dal che egli conchiuse, il rapporto della dispersione nel vetro comune, e nel flint esser quello a un dipresso di 2 : 3.

11. Sia (Fig. 11.) *CAB* il prisma di vetro comune, *ABD* quello di flint; il rapporto della refrazione de' raggi medii nel primo sia, $m:1$, nel secondo $n:1$. Il raggio incidente *EF* viene rifranto secondo le direzioni *FG*, *GH*, *HI*. Ai punti *F*, *G*, *H* si guidano i perpendicoli *Pp*, *QR*, *QS* alle superficie rifrangenti; e si suppongono i seni proporzionali agli angoli, che qui si assumono piuttosto piccoli. Nomino colle sole lettere *F*, *A*, *B*

gli angoli rispettivi EFp, CAB, ABD. Abbiam dunque $PFG = \frac{1}{m}F$, e $PGF = A - \frac{1}{m}F$. Inoltre $HGR = \frac{m}{n}PGF = \frac{m}{n}A - \frac{1}{n}F$, e $QHG = HGR - HQG = HGR - B = \frac{m}{n}A - \frac{1}{n}F - B$; e quindi $IHS = n.QHG = mA - nB - F$. Se quest' angolo IHS risulta di valor negativo, allora è segno, che IH casca dall' altra parte di HS, ed il punto d' intersezione Q cade dentro il prisma ABD. Sieno M, ed N pe' raggi violetti ciò che erano m, ed n per li medii, ed avremo per quelli l' angolo $IHS = M.A - N.B - F$. Se adunque non ha da comparire nessun colore, dovrà l' angolo IHS essere lo stssso per l' una e per l' altra specie di raggi, ovvero sarà $mA - nB = M.A - N.B$, cioè $(M - m)A = (N - n)B$, e conseguentemente $M - m : N - n :: dm : dn :: B : A :: 19^{\circ} : 30^{\circ} :: 2 : 3$ all' incirca.

Se si volesse un più esatto rapporto di $dm : dn$, si troverebbe $dm : dn :: sen. B\, sen.\, GFA : sen.\, A\, sen.\, GHB$.

V.

Come con una doppia Lente Obbiettiva si tolga la dispersione de' raggi diversamente colorati.

92. Sia (Fig. 12) AB una Lente convessa di vetro comune, e CD una concava di *flint*, entrambe tirate sul comun asse GP, e sia per la prima il rapporto della refrazione de' raggi medii dall' aria nel vetro $m : 1$, degli estremi, o violetti $M : 1$; e per la seconda sia quel rapporto ne' raggi medii $n : 1$, negli estremi $N : 1$. 12.

La distanza del foco *principale*, ossia de' raggi

paralleli sia nella prima Lente pe' raggi medii $= f$, pei raggi estremi $= F$.

La distanza del foco principale sia nella seconda Lente pei raggi medii $= g$, per raggi estremi $= G$. I raggi medii paralleli all'asse si rompono nella prima Lente *AB* e vanno ad unirsi in *H*, e così rifranti si rompono di bel nuovo nella seconda Lente *CD*, e ne escono uniti in *K*. Supposta assai piccola la distanza *EF* delle due Lenti, diventa $FH = EH = f$, ed allora trovasi il valore di $FK = \frac{fg}{g-f}$, siccome può vedersi dimostrato ne' più comuni libri di Fisica.

Per egual maniera, se i raggi estremi o violetti si rifrangono nella prima Lente verso *I*, e indi nella seconda verso *K*, cioè verso lo stesso punto de' raggi medii ad effetto d'impedire la separazione degli uni dagli altri, cioè la dispersione; allora essendo $FI = EI = F$, avremo similmente per questa specie di raggi la distanza $FK = \frac{F.G}{G-F}$. Dunque la nullità della dispersione porta seco l'equazione $\frac{fg}{g-f} = \frac{F.G}{G-F}$. Ma ne' libri più ovvii di Fisica si dimostrano le due seguenti analogie

$$f : F :: M - 1 : m - 1$$
$$g : G :: N - 1 : n - 1,$$

e da queste si ha $F = \frac{f(m-1)}{M-1}$; $G = \frac{g(n-1)}{N-1}$;

$F.G = \frac{fg(m-1)(n-1)}{(M-1)(N-1)}$; $G - F =$

$\frac{g(M-1)(n-1) - f(N-1)(m-1)}{(M-1)(N-1)}$; $\frac{F.G}{G-F} =$

$\frac{fg(m-1)(n-1)}{g(M-1)(n-1) - f(N-1)(m-1)} = \frac{fg}{g-f}$.

Dunque sarà $g(M-1)(n-1) - f(N-1)(m-1) = (g-f)(m-1)(n-1)$, e quindi $g(M-m)\times$

$(n-1) = f(N-n)(m-1)$, ovvero $g(n-1)dm = f(m-1)dn$, e conseguentemente $f:g :: \frac{dm}{m-1} : \frac{dn}{n-1} :: \frac{M-m}{m-1} : \frac{N-n}{n-1}$. Ma Dollond trovò nel vetro comune $m:1 :: 1,53:1$, e nel *flint* $n:1 :: 1,58:1$, ed inoltre $dm:dn :: 2:3$, o più esattamente $:: 19:30$. Dunque sarà $f:g :: \frac{2}{53} : \frac{3}{58}$, oppure più rigorosamente $f:g :: \frac{19}{53} : \frac{30}{58} :: 1:1,443$, ed in questa proporzione dovranno essere tra loro le distanze *principali* de' fuochi delle due Lenti mentovate di vetro comune, e di *flint* per impedire la dispersione de' colori; ed è poi altronde manifesto, che date quelle distanze si rendono subito noti i raggi di curvatura delle medesime Lenti.

Teorema I.

93. *Rappresenta* $\mathrm{m}:1$ *la ragione della refrazione de' raggi di mezzana refrangibilità nel passare da un mezzo ad un altro;* $\mathrm{m}+\mathrm{dm}:1$ *è la ragione di refrazione de' raggi violetti, cioè di massima refrangibilità, ed* $\mathrm{m}-\mathrm{dm}:1$ *è la ragione di refrazione de' raggi rossi, cioè de' raggi di minima refrangibilità; e la quantità* dm *essendo costante nello stesso mezzo, viene perciò assunta come una misura della potenza dispersiva. Chiamo* I *l'angolo d'incidenza de' raggi di ogni specie,* R *l'angolo di refrazione de' raggi rossi,* R' *de' violetti,* r *de' raggi medii, o di mezzana refrangibilità. Ciò posto dico, che l'angolo di dispersione del raggio rosso, e del violetto, cioè l'angolo* $\mathrm{R}-\mathrm{R}'$ *è sotteso da un arco* $= \frac{2\mathrm{dm}\ \mathrm{tang.\,r}}{\mathrm{m}}$, *essendo* 1 *il seno tutto*.

Dim. Abbiamo $m-dm : 1 :: sen.\ I : sen.\ R$, $m+dm : 1 :: sen.\ I : sen.\ R'$, cioè $sen.\ R = \frac{sen.\ I}{m-dm}$, $sen.\ R' =$

$\frac{sen.\ I}{m + dm}$, $cos.\ R = \frac{\sqrt{(\overline{m - dm}^2 - sen.\ I^2)}}{m - dm}$, $cos.\ R' = \frac{\sqrt{(\overline{m + dm}^2 - sen.\ I^2)}}{m + dm}$. Ora il picciolissimo *angolo di dispersione* è $= R - R'$, il cui seno è $sen.\ (R - R') = sen.\ R\ cos.\ R' - sen.\ R'\ cos.\ R = \frac{sen.\ I}{m^2 - dm^2}\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2 + 2mdm + dm^2)} - \frac{sen.\ I}{m^2 - dm^2}\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2 - 2mdm + dm^2)} = \frac{sen.\ I}{m^2 - dm^2}\left[\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2 + 2mdm + dm^2)} - \sqrt{(m^2 - sen.\ I^2 - 2mdm + dm^2)}\right] = \frac{sen.\ I}{m^2 - dm^2}\left[\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2)} + \frac{mdm}{\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2)}} - \sqrt{(m^2 - sen.\ I^2)} + \frac{mdm}{\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2)}}\right] = \frac{2mdm\ sen.\ I}{m^2\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2)}} = \frac{2dm\ sen.\ I}{m\sqrt{(m^2 - sen.\ I^2)}}$.

Chiamato r l'angolo di refrazione de' raggi di mezzana refrangibilità, sarà $sen.\ I = m\ sen.\ r$, e però $sen.\ (R - R') = \frac{2dm\ sen.\ r}{\sqrt{(m^2 - m^2 sen.\ r^2)}} = \frac{2dm\ sen.\ r}{m\sqrt{(1 - sen.\ r^2)}} = \frac{2dm\ sen.\ r}{m\ cos.\ r} = \frac{2dm\ tang.\ r}{m}$. Ma per la piccolezza dell' angolo di dispersione $R - R'$, l' arco che sottende quest' angolo non differisce dal suo seno. Dunque tale arco $= \frac{2dm\ tang.\ r}{m}$. Il che era ec.

Teorema II.

94. *Se i raggi sono refratti da due superficie inclinate l' una all' altra come i lati di un prisma, ed oltre le precedenti denominazioni si chiama* a *l' angolo fatto dalle due superficie rifrangenti*, r *l' angolo della seconda refrazione de' raggi medii: dico, che l' angolo sotto cui i raggi rosso, e violetto sono inclinati l' uno all' altro dopo la seconda refrazione, cioè l' angolo della loro dispersione è* $= \frac{2dm \text{ sen. } a}{\cos. r \cos. r'}$.

Dim. 1.° OB (Fig. 13) è il raggio incidente composto di sette colori. 13.

2.° FG, HI, LN, PR sono i perpendicoli alle superficie AQ, AS del prisma rifrangente QAS.

3.° BK, BM, BV sono i raggi rosso, medio, e violetto rifranti dalla prima superficie del prisma.

4.° KX, MZ, VT sono i predetti raggi rifranti dalla seconda superficie del prisma.

5.° Angolo rifrangente del prisma $A = a$.

6.° Rapporto del seno d' incidenza al seno di refrazione nel passaggio dall' aria nel prisma $m : 1$ pe' raggi medii; $m - dm : 1$ pe' raggi rossi; $m + dm : 1$ pe' raggi violetti.

7.° Prima refrazione de' raggi medii $MBG = r$.

8.° Angolo di dispersione $KBV = \frac{2dm \text{ tang. } r}{m}$ pel Teorema I.

9.° Refrazione de' raggi rossi $KBG = r + \frac{dm \text{ tang. } r}{m}$.

10.° Refrazione de' raggi violetti $VBG = r - \frac{dm \text{ tang. } r}{m}$.

11.° Nuova incidenza de' raggi medii $BMN = i = a - r$, perchè i, ed r aggiunti ad AMB, ed

ABM fanno due angoli retti, come li fa con essi anche a, è però $i + r = a$, $i = a - r$.

12.° Nuova incidenza de' raggi rossi $BKI = i - \frac{dm\ tang.\ r}{m}$.

13.° Nuova incidenza de' raggi violetti $BVR = i + \frac{dm\ tang.\ r}{m}$.

14.° Seconda refrazione de' raggi medii $ZML = r'$, e però $1 : m :: sen.\ i : sen.\ r' = m\ sen.\ i$, e $cos.\ r' = \sqrt{(1 - m^2 sen.\ i^2)}$.

15.° Seconda refrazione de' raggi rossi $XKH = R$; e quindi $1 : m - dm :: sen.\left(i - \frac{dm\ tang.\ r}{m}\right) : sen.\ R = (m - dm)\ sen.\left(i - \frac{dm\ tang.\ r}{m}\right) = (m - dm)\ sen.\ i - \frac{(m - dm)\ dm\ tang.\ r\ cos.\ i}{m} = m\ sen.\ i - dm\ sen.\ (a - r) - \frac{dm\ sen.\ r}{cos.\ r} cos.\ (a - r) = m\ sen.\ i - dm\ (sen.\ a\ cos\ r - sen.\ r\ cos.\ a) - \frac{dm\ sen.\ r}{cos.\ r}(sen.\ a\ sen.\ r + cos.\ a\ cos.\ r) = m\ sen.\ i - dm\ sen.\ a\ cos.\ r - \frac{dm\ sen.\ a\ sen.\ r^2}{cos.\ r} = m\ sen.\ i - \frac{dm\ sen.\ a}{cos.\ r}$.

16.° $cos. R = \sqrt{\left(1 - m^2 sen.\ i^2 + \frac{2mdm\ sen.\ a\ sen.\ i}{cos.\ r}\right)}$.

17.° Seconda refrazione de' raggi violetti $TVP = R'$; onde $1 : m + dm :: sen.\left(i + \frac{dm\ tang.\ r}{m}\right) : sen.\ R' = (m + dm)\ sen.\left(i + \frac{dm\ tang.\ r}{m}\right) = (m + dm)\ sen.\ i + \frac{(m + dm)\ dm\ tang.\ r\ cos.\ i}{m} = m\ sen.\ i + dm\ (sen.\ a\ cos.\ r - sen.\ r\ cos.\ a) + \frac{dm\ sen.\ r}{cos.\ r}(sen.\ a\ sen.\ r + cos.\ a\ cos.\ r) = m\ sen.\ i +$

$dm\ sen.\ a\ cos.\ r + \frac{dm\ sen.\ a\ sen.\ r^2}{cos.\ r} = m\ sen.\ i + \frac{dm\ sen.\ a}{cos.\ r}$.

18.° $cos. R' = \sqrt{\left(1 - m^2 sen.\ i^2 - \frac{2mdm\ sen.\ a\ sen.\ i}{cos.\ r}\right)}$.

19.° Ora l' angolo di dispersione dopo la seconda refrazione nell' uscire dal vetro, cioè l' angolo, sotto cui concorrono i raggi rossi, e violetti dopo la seconda refrazione, non è manifestamente altro che $R' - R$; e conseguentemente per la sua picciolezza sarà $R' - R = sen.\ (R' - R) = sen.\ R' cos.\ R - sen.\ R\ cos.\ R' =$ . . . . . .
$\left(m\ sen.\ i + \frac{dm\ sen.\ a}{cos.\ r}\right)\sqrt{\left(cos.\ r'^2 + \frac{2mdm\ sen.\ a\ sen.\ i}{cos.\ r}\right)} - \left(m\ sen.\ i - \frac{dm\ sen.\ a}{cos.\ r}\right)\sqrt{\left(cos.\ r'^2 - \frac{2mdm\ sen.\ a\ sen.\ i}{cos.\ r}\right)}$
$= \frac{2dm\ sen.\ a\ cos.\ r'}{cos.\ r} + \frac{2m^2 dm\ sen.\ a\ sen.\ i^2}{cos.\ r\ cos.\ r'} =$
$\frac{2dm\ sen.\ a}{cos.\ r\ cos.\ r'}(cos.\ r'^2 + m^2 sen.\ i^2) = \frac{2dm\ sen.\ a}{cos.\ r\ cos.\ r'}$. Il che era ec.

95. Cor. I. Questo Teorema generale assai rimarchevole non si trova presso gli Scrittori di Ottica, ed in vece s' incontra presso taluno quest' altro affatto particolare, cioè che se il raggio incidente sulla prima superficie del prisma ha una tal posizione, che esca dalla seconda superficie sotto il medesimo angolo, con cui è entrato nella prima, allora l' angolo di dispersione $R' - R$ è $= \frac{4dm\ sen.\ \frac{1}{2}a}{cos.\ r'}$. Ciò non è che un corollario del nostro Teorema, avvegnachè essendo per ipotesi la prima incidenza OBF uguale alla seconda refrazione ZML, dovrà essere anche la prima refrazione MBG eguale alla seconda incidenza BMN per la ragione costante della refrazione. Ma tanto i due

angoli insieme MBG, BMN, quanto il solo angolo A formano due angolo retti coi due ABM; AMB; dunque $2MBG = a$, cioè $2r = a$, ovvero $r = \frac{1}{2}a$; e quindi $R' - R = \frac{2dm\,sen.\,a}{cos.\,r\,cos.\,r'} = \frac{2dm\,sen.\,a}{cos.\,\frac{1}{2}a\,cos.\,r'} = \frac{4dm\,sen.\,\frac{1}{2}a\,cos.\,\frac{1}{2}a}{cos.\,\frac{1}{2}a\,cos.\,r'} = \frac{4dm\,sen.\,\frac{1}{2}a}{cos.\,r'}$.

96. Cor. 2. Se il raggio cade perpendicolarmente sulla prima superficie del prisma, allora diventa la seconda incidenza $i = a$, e in conseguenza $sen.\,a = sen.\,i = \frac{sen.\,r'}{m}$; onde chiamato Δ l'angolo di dispersione $R' - R$, nasce $\Delta = \frac{2dm\,sen.\,a}{cos.\,r\,cos.\,r'}$, che, per essere $r = 0$, si cangia in $\Delta = \frac{2dm\,sen.\,r'}{m\,cos.\,r'} = \frac{2dm\,tang.\,r'}{m}$.

97. Cor. 3. Per misurare la potenza refrattiva, cioè m, e la dispersiva, ossia dm d'una qualunque sostanza rifrangente, basta misurare nel caso del Cor. prec. l'angolo di refrazione r' de' raggi mezzani, e l'angolo di dispersione Δ; e si conoscerà subito così il valore di $m = \frac{sen.\,r'}{sen.\,a}$, come quello di $dm = \frac{m\Delta}{2tang.\,r'}$.

VI.

Formole generali della dispersione de' colori per qualunque numero di Lenti.

98. 1.° Essendo il sistema delle Lenti disposto sul medesimo asse, chiamo a la distanza dell'oggetto dalla prima Lente; α la distanza della sua immagine.

2.° Chiamo b la distanza di detta immagine dalla seconda Lente; β la distanza della seconda immagine da essa Lente.

3.° Chiamo c la distanza di detta seconda immagine dalla terza Lente; γ la distanza della terza immagine da tal Lente.

4.° Dico e la distanza della terza immagine dalla quarta Lente; ε la distanza della quarta immagine.

E così discorrendo per le altre Lenti quante mai esser possano.

5.° Nomino p, q, r, s, ec. le distanze focali *principali*, ovvero de' raggi *medii* vegnenti da un oggetto lontanissimo, per la prima, seconda, terza, quarta Lente, ec.

Ciò posto, e detto f il raggio di curvatura della superficie anteriore della prima Lente, g della superficie posteriore, $n:1$ il rapporto della refrazione de' raggi *medii* nel passare dall' aria a questa Lente; avremo, come è noto, $\alpha = \frac{ap}{a-p}$, e $p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$. Per applicare questa, e le altre formole analoghe susseguenti alla determinazione del cammino de' raggi di *massima*, e di *minima* refrangibilità, basta farle variare in ordine alla quantità n, e prendere le variazioni di n per modo, che il raggio *medio* si cangi in rosso, o violetto. Ora le variazioni della quantità n ne producono una nella distanza dell' immagine principale dietro la Lente, ovvero un' *aberrazione longitudinale*, la qual sarà $= d\alpha$, considerandosi come infinitamente picciole le variazioni di n. Perlocchè sarà $d\alpha = d.\frac{ap}{a-p} = \frac{a^2 dp}{(a-p)^2} = \frac{a^2 p^2}{(a-p)^2}.\frac{dp}{p^2} = \frac{\alpha^2 dp}{p^2}$. Ma $dp = -\frac{fgdn}{(n-1)^2(f+g)} = -\frac{pdn}{n-1}$. Dunque so-

stituendo questo valore di dp nel precedente di $d\alpha$, avremo

$$\text{I}^{\circ}\ d\alpha = \mp \frac{\alpha^2 dn}{p(n-1)},$$

nella qual formola il segno inferiore $+$ vale pe' raggi rossi, pe' quali la variazione dn riesce negativa, il che rende positiva la detta formola.

Sia per la seconda Lente, che qui supporremo d'un'altra specie di vetro, il rapporto della refrazione pe' raggi *medii* $n' : 1$; ed essendosi detta q la distanza focale *principale* de' raggi *medii* sarà $q - q \cdot \frac{dn'}{n'-1}$ quella pe' raggi violetti; avvegnachè siccome $(n-1)p = \frac{fg}{f+g}$ è dato pe' soli semidiametri delle superficie della prima Lente, così pure $(n'-1)q$ sarà dato pe' soli semidiametri della seconda, e però sarà costante; onde differenziando avremo $(n'-1)dq + qdn' = 0$, cioè $dq = -q \cdot \frac{dn'}{n'-1}$; e quindi la distanza del fuoco *principale* pe' raggi violetti, che è $q + dq$, sarà $q - q \cdot \frac{dn'}{n'-1}$. Per conseguire presentemente l'aberrazione longitudinale della seconda immagine, ossia il valore di $d\beta$, basta differenziare l'espressione di $\beta = \frac{bq}{b-q}$, supponendo b, e q variabili, il che dà $d.\frac{1}{\beta} = d.\frac{b-q}{bq}$, ovvero $\frac{d\beta}{\beta\beta} = \frac{dq}{qq} - \frac{db}{bb}$. Sostituisco per dq il valore dianzi trovato, e per db il suo valore $-d\alpha$, ovvero $\frac{\alpha^2 dn}{p(n-1)}$, prendendo le variazioni dn, e dn' positive; con che ottengo $\frac{d\beta}{\beta\beta} = -\frac{dn'}{q(n'-1)} - \frac{\alpha^2}{b^2} \cdot \frac{dn}{p(n-1)}$; e quindi

II.° $d\beta = \mp \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}\left(\frac{dn}{p(n-1)} + \frac{b^2}{\alpha^2 q}\cdot\frac{dn'}{(n'-1)}\right)$;
ed in questa formola il segno inferiore vale per l'aberrazione dell'immagine rossa, come si è prima avvertito.

Allo stesso modo, essendo nella terza Lente $\gamma = \frac{cr}{c-r}$, ovvero $\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r}$, si ha differenziando $\frac{dc}{cc} + \frac{d\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{dr}{rr}$, e perciò $d\gamma = \gamma\gamma\left(\frac{dr}{rr} - \frac{dc}{cc}\right)$. Ma la distanza $\beta + c$ della seconda, e terza Lente essendo costante, ne risulta $dc = -d\beta$; ed è inoltre per egual ragione di p, e q anche per r il valore $dr = -\frac{dn''}{n''-1}\cdot r$, preso $n'' : 1$ pel rapporto della refrazione de' raggi *medii*. Dunque sostituendo nel valore di $d\gamma$ quelli di dr, e $d\beta$, si otterrà

III.° $d\gamma = \mp \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{b^2c^4}\left(\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p} + \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{b^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{q} + \frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2}\cdot\frac{1}{r}\right)$;

e qui pure si avrà la stessa avvertenza di prima in ordine ai segni.

Procedendo di questo tenore, trovasi per la quarta Lente, per cui $n''' : 1$ esprime il rapporto di refrazione de' raggi *medii*, la variazione della distanza focale, ossia l'aberrazione longitudinale della quarta immagine, come segue

IV.° $d\varepsilon = \mp \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2\varepsilon^2}{b^2c^2e^2}\left(\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p} + \frac{dn'}{n'-1}\cdot\frac{bb}{\alpha\alpha}\cdot\frac{1}{q} + \frac{dn''}{n''-1}\cdot\frac{b^2c^2}{\alpha^2\beta^2}\cdot\frac{1}{r} + \frac{dn'''}{n'''-1}\cdot\frac{b^2c^2e^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\cdot\frac{1}{s}\right)$.

Da ciò evidentemente si fa palese la legge dell'aberrazione longitudinale dell'immagine, ovvero della dispersione de' raggi differentemente colorati per qualunque sistema di Lenti.

Il perchè, se si porrà uguale a zero il valore ritrovato della dispersione, cioè di $d\beta$ quando trattasi d'un sistema di due Lenti; di $d\gamma$, quando il sistema è di tre Lenti; di $d\varepsilon$, allorchè il sistema sarà di quattro Lenti; e così appresso: si avranno le equazioni opportune per determinare la forma, e la qualità delle Lenti ad effetto di render nulla la *dispersione*.

ARTICOLO IX.

Sopra la densità e pressione dell'Atmosfera terrestre.

Problema I.

99. *Ritrovare la relazione fra la densità dell'aria atmosferica, e l'altezza del luogo corrispondente, supposta la legge delle variazioni della densità stessa, e della gravità terrestre.*

Sol. Supponiamo che la densità dell'aria seguiti la ragione d'una potenza m de' pesi comprimenti, e che la gravità seguiti quella d'una potenza inversa n della distanza dal centro della terra: si dica r il semidiametro terrestre, x l'altezza sopra la superficie, g la gravità alla stessa superficie, p il peso di tutta la colonna atmosferica dalla superficie in su; e sarà $\frac{gr^n}{(r+x)^n}$ la gravità all'altezza x; e posta $y =$ alla densità dell'aria nell'altezza x, e Δ la densità alla superficie della terra, avremo $\frac{-gr^n ydx}{(r+x)^n}$ per l'elemento del peso della colonna aerea, che si estende dall'estremo di x all'insù, e quindi $-\int\frac{gr^n ydx}{(r+x)^n}$ pel peso di tutta quella colonna. Ora la legge delle densità ci offre l'analogia $\Delta : y :: p^m : \left(-\int\frac{gr^n ydx}{(r+x)^n}\right)^m$, e quindi $y = \frac{\Delta}{p^m}\left(-\int\frac{gr^n ydx}{(r+x)^n}\right)^m$, ed estraendo la radice

m

m, nasce $y^{\frac{1}{m}} = - \frac{\Delta^{\frac{1}{m}}}{p} \int \frac{gr^n y dx}{(r+x)^n}$, e differenziando, e indi dividendo per y trovasi $\frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} dy = -\frac{\Delta^{\frac{1}{m}}}{p} \cdot \frac{gr^n dx}{(r+x)^n}$. L' integrale di quest' equazione è $\frac{y^{\frac{1}{m}-1}}{1-m} = \frac{g\Delta^{\frac{1}{m}} r^n}{(n-1)p(r+x)^{n-1}} + Cost.$; e poichè $y = \Delta$ quando $x = 0$, si ha perciò $Cost. = \ldots$ $\frac{\Delta^{\frac{1}{m}-1}}{1-m} - \frac{g\Delta^{\frac{1}{m}} r}{(n-1)p}$. Dunque $\frac{\Delta^{\frac{1}{m}-1} - y^{\frac{1}{m}-1}}{1-m} =$ $\frac{g\Delta^{\frac{1}{m}} r}{(n-1)p}\left[1 - \left(\frac{r}{r+x}\right)^{n-1}\right]$. Il che era ec.

100. Cor. I. Se ora sarà $m > 1$, è evidente, che nel supposto della densità y evanescente, o nulla, il primo membro di quest' equazione diventa infinito, mentre intanto (posto $n > 1$) il secondo membro rimane sempre finito, anche quando l' altezza x sia infinita. Non par dunque, che in quest' ipotesi la densità y possa mai svanire, nè tampoco ad un' altezza infinita, ma dee persistere anche quivi ad esser infinita. Questo paradosso s' incontra anche quando sia $m = 1$, cioè supposta la legge ordinaria della densità in proporzione semplice de' pesi prementi: avvegnachè in quest' ipotesi integrando l' equazione $\frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-2} dy = -\frac{\Delta^{\frac{1}{m}}}{p} \cdot \frac{gr^n dx}{(r+x)^n}$ si

ottiene $log. y = \frac{g\Delta r^n}{(n-1)p(r+x)^{n-1}} + Cost.$; e $Cost. = log. \Delta - \frac{g\Delta r}{(n-1)p}$; e conseguentemente $log. \frac{\Delta}{y} = \frac{g\Delta r}{(n-1)p}\left[1 - \left(\frac{r}{r+x}\right)^{n-1}\right]$; dove si vede, che y non può diventar zero, perchè allora il primo membro diventa infinito, mentre intanto il secondo riman sempre finito anche facendosi infinita l'altezza x; ond' è, che anche a quest'altezza infinita la densità y persiste ad esser finita.

Scol. I. Il Sig. Giovanni Playfair Prof. di Matem. nell'Università di Edinburgh in una assai bella Dissert. *sopra le cagioni, che alterano l'esattezza delle misure barometriche* §. 36. inserita nel 1.º tomo delle *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 1788. da una consimile equazione nel supposto di $y = 0$ ne inferisce, che il semidiametro terrestre r è infinito, e di qui che *the athmosphere on this supposition admits of no limit*, illazione visibilmente assurda essendo contro il fatto, e la natura delle cose il dare al semidiametro della terra una lunghezza infinita.

101. Cor. II. Supposto sempre $n > 1$, e fatta $x = \infty$, diventa $log. \frac{\Delta}{y} = \frac{g\Delta r}{(n-1)p}$, e preso e per la base de' logaritmi iperbolici sarà $y = \Delta e^{\frac{-g\Delta r}{(n-1)p}}$, che esprime la densità dell'aria ad un altezza infinita dover essa trovarsi tuttavia visibilmente finita.

102. Cor. III. Supposto poi $x = r$, risulta $y = \Delta e^{\frac{-g\Delta r}{(n-1)p}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)} = \Delta e^{\frac{-g\Delta r}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)} = D$, denotando per D la densità dell'aria all'al-

tezza d'un semidiametro terrestre, onde $\frac{D}{\Delta} = e^{\frac{-g\Delta r}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)}$; e se Y esprime la densità dell' aria ad un'altezza infinita, avremo $\frac{Y}{\Delta} = e^{\frac{-g\Delta r}{(n-1)p}}$.

Perlocchè $\frac{D}{\Delta} = \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}$, ed $\frac{Y}{\Delta} = \left(\frac{D}{\Delta}\right)^{\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}}$. Se ora si suppone la gravità in ragione inversa del quadrato delle distanze dal centro della terra, cioè $n = 2$, nasce $\frac{Y}{\Delta} = \frac{D^2}{\Delta^2}$, ed $Y = \frac{D^2}{\Delta}$; il che dà questo bel Teorema: *nell' ipotesi Newtoniana della gravità terrestre, e nella comune Boyleana o Mariottiana de' pesi comprimenti, la densità dell' aria atmosferica ad un' infinita distanza dalla Terra è terza continua proporzionale dopo la densità alla superficie della terra, e dopo la densità all' altezza d' un semidiametro terrestre sopra la superficie.*

Scol. II. Questo limite della rarità dell' aria atmosferica non pare essere stato conosciuto da Newton, il quale anzi mostra di credere, che l' aria si rarefaccia in *infinito* ascendendo in infinito sopra la superficie terrestre. Reco qui tutto il passo di Newton, che è memorabile per le sottili riflessioni di questo grand' Uomo sulla coda delle comete. Dice egli adunque nel lunghissimo Esempio della Prop. XLI. del Lib. III. de' Principj: *Inde vero (per regulam multis experimentis confirmatam, quod com-*

pressio aeris sit ut pondus athmosphaerae incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantiae locorum a centro terrae) computationem per corol. prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, si ascendatur a superficie terrae ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longe majori, quam spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aeris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphaeram Saturni et longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior IN IMMENSUM rarescat, et coma seu athmosphaera cometae, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quam rarissima. Et quamvis ob longe crassiorem cometarum athmosphaeram, magnamque corporum gravitationem solem versus, et gravitationem particularum aeris et vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis coelestibus inque cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aeris et vaporum ad omnia illa caudarum phaenomena abunde sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam et caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Athmosphaera terrestris luce solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, et astra omnia et ipsam lunam obscurat et extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

103. Scol. III. Il famoso *David Gregori* nella sua elegantissima opera intitolata *Astronomiae Physicae et Geometricae Elementa*, che dal celebre Giovanni Keil nella Prefazione della sua Introduzione alla

vera Fisica ed Astronomia viene caratterizzata col pomposo elogio di *opus cum sole et luna duraturum*, asserisce decisivamente nel fine della Prop. 3. del Lib. V., che l'aria all'altezza d'un semidiametro terrestre sopra la superficie della terra si troverebbe più attenuata e rarefatta nella vera ipotesi della gravità decrescente che non nell'ipotesi della gravità costante. Questa asserzione di Gregori sembra assolutamente erronea: imperciocchè nella formola $y = \Delta e^{\frac{-g\Delta r}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)}$, se si fa $n=2$, come esige la vera ipotesi della gravità decrescente, risulta $y = \Delta e^{\frac{-g\Delta r}{2p}} = \frac{\Delta}{e^{\frac{g\Delta r}{2p}}}$; e per l'opposto se si fa $n=0$, come richiede l'ipotesi della gravità costante, nasce $y = \Delta e^{\frac{-g\Delta r}{p}} = \frac{\Delta}{e^{\frac{g\Delta r}{p}}}$; dal che apparisce, che la densità dell'aria nell'altezza d'un semidiametro terrestre sopra la superficie, nel supposto della gravità costante, sta a tal densità nell'ipotesi della gravità realmente decrescente, come sta $\frac{1}{e^{\frac{g\Delta r}{p}}} : \frac{1}{e^{\frac{g\Delta r}{2p}}}$, ovvero come $e^{\frac{g\Delta r}{2p}} : e^{\frac{g\Delta r}{p}}$, o finalmente come $1 : \sqrt{e^{\frac{g\Delta r}{p}}}$. E siccome facilmente si dimostra essere $\sqrt{e^{\frac{g\Delta r}{p}}} = 10^{156}$, ed anzi maggiore; quindi si conchiude, che quella densità nel

supposto della gravità costante è così prodigiosamente minore di tale densità nell' ipotesi della gravità decrescente come l'unità è minore del numero immenso 10^{156}. E ciò mostra quanto si allontana dal vero la proposizione del Gregori, che ha indotto in errore alcuni altri abbagliati dalla sua autorità.

104. Per provare poi, che $\sqrt{e^{\frac{g\Delta r}{p}}}$, ovvero $e^{\frac{g\Delta r}{2p}}$ è maggiore di 10^{156}, basta osservare, che $\frac{g\Delta r}{2p}$ è il logaritmo iperbolico di $e^{\frac{g\Delta r}{2p}}$, e che p peso di tutta la colonna atmosferica dalla superficie in su equivale al peso di una colonna d'aria omogenea di densità Δ, la quale si equilibra con una colonna d'acqua di 32 piedi di altezza, così che supposta la densità dell' acqua 850 volte maggiore di Δ, l'altezza della colonna omogenea d'aria risulta di piedi $32 \times 850 = 27200$, e quindi il suo peso $p = 27200 g\Delta$; onde $\frac{g\Delta r}{2p} = \frac{r}{54400} = \frac{19631100}{54400}$, preso il semidiametro mezzano della terra di piedi 19631100. È dunque il logaritmo iperbolico di $e^{\frac{g\Delta r}{2p}}$ uguale al numero $\frac{196311}{544}$, ovvero un poco maggiore del numero 360, che moltiplicato per 0,4342945 diventa 156,346, e questo è il logaritmo tavolare del numero $e^{\frac{g\Delta r}{2p}}$. Siccome poi il numero, che ha per logaritmo tavolare 156,346 è manifestamente maggiore di 10^{156}; sarà anche $e^{\frac{g\Delta r}{2p}} > 10^{156}$.

105. Cor. IV. Ripiglio l'equazione generalo

$$\frac{\Delta^{\frac{1-m}{m}} - y^{\frac{1-m}{m}}}{1-m} = \frac{gr\Delta^{\frac{1}{m}}}{(n-1)p}\left[1-\left(\frac{r}{r+x}\right)^{n-1}\right];$$

questa, supposto $x = \infty$, diventa $y^{\frac{1-m}{m}} = \Delta^{\frac{1-m}{m}}$

$$-\frac{(1-m)gr\Delta^{\frac{1}{m}}}{(n-1)p} = \Delta^{\frac{1-m}{m}}\left(\frac{(n-1)p-(1-m)gr\Delta}{(n-1)p}\right).$$

Dunque $y = Y = \Delta\left(\frac{(n-1)p-(1-m)gr\Delta}{(n-1)p}\right)^{\frac{m}{1-m}}$.

Che se in vece di $x = \infty$ si assume $x = r$ la predetta equazione si cangia in quest' altra $y^{\frac{1-m}{m}} =$

$$\Delta^{\frac{1-m}{m}} - \frac{(1-m)gr\Delta^{\frac{1}{m}}}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n}-1}\right) =$$

$$\Delta^{\frac{1-m}{m}}\left[1-\frac{(1-m)gr\Delta}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)\right];$$

conseguentemente $y = D = \ldots\ldots\ldots$

$$\Delta\left[1-\frac{(1-m)gr\Delta}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)\right]^{\frac{m}{1-m}}.$$

Dal che si scorge che $\ldots\ldots\ldots$

$$D : Y :: \left[1-\frac{(1-m)gr\Delta}{(n-1)p}\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)\right]^{\frac{m}{1-m}} :$$

$\left[\frac{(n-1)p-(1-m)gr\Delta}{(n-1)p}\right]^{\frac{m}{1-m}}$, e quindi la den-

sità dell'aria atmosferica all'altezza d'un semidiametro terrestre sopra la superficie della terra nell' ipotesi di $n > 1$, ha sempre un rapporto finito colla densità dell' aria in un' altezza infinita, qualunque sia m, ossia la ragione fra i pesi comprimenti e le compressioni. Dico poi qualunque sia m, perchè in tutti i casi, in cui m è comunque differente dall' unità tanto per eccesso che per diffetto, la cosa è di per se evidente; e nel solo caso di $m = 1$, dove non ha più luogo la formola, nè l'analogia indi dedotta, si è già trovato precedentemente

$$\frac{Y}{\Delta} = \left(\frac{D}{\Delta}\right)^{\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}},$$ che dà a divedere che la ragione della densità dell'aria nella superficie terrestre alla densità in una altezza infinita è $\left(\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\right)^{plicata}$ della ragione, che ha la densità stessa nella superficie terrestre alla densità nella distanza d'un semidiametro dalla superficie.

Problema II.

106. *Ritrovare il centro di gravità* O (Fig. 14.) *della colonna d'aria* AC, *che dalla superficie della terra si estende sino al termine dell' atmosfera.* 14.

Sol. Sia $AP = x$, $Pp = dx$, l'altezza del mercurio nel barometro in $A = a$, in $P = y$; e la densità dell'aria in $A = h$. La legge di Mariotte delle densità proporzionali ai pesi prementi ci offre l'analogia $a : y :: h : \frac{hy}{a} =$ densità in P. Avremo dunque pel peso dell'elemento Pp, o dx l'espressione $\frac{hy}{a}dx = -dy$ (supposta 1 la densità

del mercurio); e il momento di questo peso elementare per rapporto ad A sarà $\frac{hxy}{a}dx = - xdy$. La prima equazione ci dà $dx = - \frac{ady}{hy}$, ed integrando $x = - \frac{a}{h} log. y + Cost.$, dove essendo $y = a$ quando $x = 0$, nasce $Cost. = \frac{a}{h} log. a$, e però $x = \frac{a}{h} log. \frac{a}{y}$. Perlocchè $\frac{hxy}{a}dx = - \frac{a}{h}dy\, log. \frac{a}{y} = \frac{a}{h}dy\, log. \frac{y}{a}$; ed integrando avremo il momento della parte indefinita AP per rapporto ad $A = \frac{a}{h}\int dy\, log. \frac{y}{a} = \frac{a}{h}\left(y\, log. \frac{y}{a} - y\right) + Cost.$ Questo momento svanisce in A, cioè allorchè $y = a$; dunque $Cost. = \frac{a^2}{h}$; e quindi il detto momento $= \frac{a}{h}\left(a - y + y\, log. \frac{y}{a}\right) = \ldots \frac{a}{h}\left(a - y - y\, log. \frac{a}{y}\right)$. Suppongasi ora, che all' estremità C dell'atmosfera l'altezza y del barometro si cangi in f, ed avremo il momento di tutta la colonna aerea AC, ossia tutto il suo peso $a - f$ moltiplicato per AO, cioè $(a - f)AO = \ldots \frac{a}{h}\left(a - f - f\, log. \frac{a}{f}\right)$; e conseguentemente $AO = \frac{a}{h(a-f)}\left(a - f - f\, log. \frac{a}{f}\right)$. Il che era ec.

107. Cor. I. Se si assume $f = 0$, il che importa che la densità dell'aria al termine supremo dell'atmosfera sia zero, e che conseguentemente nella legge Mariottiana qui adottata l'altezza dell' atmosfera sia infinita, troveremo $AO = \frac{a}{h}$, cioè

$h : 1 :: a : AO$, vale a dire la distanza del centro di gravità della colonna aerea infinitamente lunga dalla superficie della terra è quarta proporzionale dopo la gravità specifica dell'aria in detta superficie, la gravità specifica del mercurio, e l'altezza del barometro nella stessa superficie. Così posto $h = \frac{1}{10891}$, $a = 2\frac{1}{3}$ piedi, sarà $AO = 25412$ piedi.

108 Cor. II. Supponiamo adesso, che $y = 1$ linea, e vediamo qual sarà la distanza del centro Q di gravità dalla superficie della terra per la colonna d'aria, la quale si estende sino all'altezza dove il barometro non ha che una linea di mercurio. Avremo dunque $AQ = \frac{10891 \times 336}{335}(335 - log. 336)$ lin., e perchè il logaritmo iperbolico di 336 è 5,8171111, sarà $AQ = \frac{10891 \times 336 \times 329,183}{335}$ lin. $= \frac{10891 \times 336 \times 329,183}{335 \times 144}$ pi. $= 24971$ pi.

Da ciò apparisce, che il centro di gravità di questa colonna di altezza finita è distante dal centro di gravità della colonna d'infinita altezza di soli piedi 441; il che è una specie di paradosso.

109. L'altezza poi della colonna aerea, in cima alla quale il barometro non conterrebbe che una linea di mercurio, si ha dall'equazione $x = \frac{a}{h} log. \frac{a}{y} = 10891 \times 336 \times 5,8171$ lin. $= \ldots \frac{10891 \times 336 \times 5.8171}{144}$ pi. $= 147826$ pi., che non arriva ad un centesimo del semidiametro terrestre. Dunque una colonna d'aria, che si alza sopra la superficie terrestre per meno d'un centesimo del semidiametro della terra ha il suo centro di gravità situato soltanto 441 piedi al di sotto del centro di gravità di quella colonna, che dalla superficie terrestre si estende ad un'altezza infinita.

Io comunicai non ha guari il risultato della soluzione di questo Problema al celebre Sig. Ab. Pessuti Prof. di Matematica nell' Archiginnasio Romano, il quale allettato dalla vaghezza dell' indagine vi si accinse egli pure, e volle poi farmi parte d'una sua elegante soluzione, con cui egli giunge alla medesima conclusione.

Problema III.

110. *Si domanda il peso d' una colonna, ò piuttosto linea aerea* TN, (Fig. 15) *che dalla superficie* T
15. *della terra s' innalza sino all' elevazione qualunque* NT, *supposta la gravità terrestre in ragione inversa de' quadrati delle distanze, e le densità dell' aria proporzionali ai pesi comprimenti.*

Sol. Chiamo r il semidiametro terrestre CT, x l'altezza indeterminata CN, e però il suo elemento $Nn = dx$; chiamo inoltre y la densità dell' aria in N, g la gravità terrestre alla superficie della terra, ovvero in T; onde per la legge della gravità, sarà essa in $N = \frac{gr^2}{x^2}$; e conseguentemente il peso dell' elemento Nn sarà $= \frac{gr^2ydx}{x^2}$, il cui integrale, preso per modo, che si annulli allorquando $x = r$, darà il peso della colonna indeterminata TN. Ma per ritrovare quest' integrale è mestieri rintracciare il valore di y espresso per una funzione di x. A tal effetto suppongo, che sia a l' altezza nota del barometro in T, 1 la gravità specifica del mercurio, e Δ la gravità specifica, o densità dell' aria parimente in T. E manifesto, che ga rappresenta il peso comprimente dell' aria in T, e $-\int\frac{gr^2ydx}{x^2}$ esprime il peso comprimente in N, ovvero il peso della colonna aerea NO sino al termine dell' atmos-

ferà, la qual espressione si prende negativa, perchè il peso premente va scemando a misura che x o CN va crescendo. Ora la legge della densità ci offre l'analogia $\Delta : y :: ga : -\int\frac{gr^2ydx}{x^2}$; e quindi $y = -\frac{\Delta r^2}{a}\int\frac{ydx}{x^2}$, e differenziando $\frac{dy}{y} = -\frac{\Delta r^2 dx}{ax^2}$, il cui integrale è $log. y = \frac{\Delta r^2}{ax} + Cost.$ Siccome poi allorchè diventa $x = r$, nasce $y = \Delta$; perciò abbiamo $Cost. = log. \Delta - \frac{\Delta r}{a}$. Laonde $log. \frac{y}{\Delta} = \frac{\Delta r}{a}\left(\frac{r}{x} - 1\right) = \frac{\Delta r(r-x)}{ax}$; e preso e per la base de' logaritmi iperbolici, e passando da' logaritmi a' numeri, si otterrà $y = \Delta e^{\frac{\Delta r(r-x)}{ax}}$.

Se ora nel peso $\frac{gr^2ydx}{x^2}$ dell' elemento Nn si sostituisce questo valore di y, nasce il peso stesso $= \frac{\Delta gr^2}{x^2} e^{\frac{\Delta r(r-x)}{ax}} dx = \Delta gr^2 e^{\frac{-\Delta r}{a}} \times \frac{dx}{x^2} e^{\frac{\Delta r^2}{ar}}$. Dunque integrando, sarà il peso della colonna aerea $TN = \Delta gr^2 e^{-\frac{\Delta r}{a}} \int\frac{dx}{x^2} e^{\frac{\Delta r^2}{ax}} = \Delta gr^2 e^{-\frac{\Delta r}{a}} \times -\frac{a}{\Delta r^2} e^{\frac{\Delta r^2}{ax}} + Cost. = -age^{\frac{\Delta r(r-x)}{ax}} + Cost.$ Ma questo peso svanisce quando $x = r$; dunque $Cost. = ag$; e però il peso di $TN = ga\left(1 - e^{\frac{\Delta r(r-x)}{ax}}\right) = ga\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r(x-r)}{ax}}}\right)$. Il che era ec.

111. Scol. Qui s' incontra un parodosso inaspettato e singolarissimo. Se si fa $x = \infty$ per avere tutta l' altezza della colonna atmosferica, la quale nella presente ipotesi delle densità proporzionali ai pesi comprimenti dee necessariamente estendersi in infinito, risulta il peso di tutta la colonna dalla superficie della terra sino al termine infinitamente alto dell' atmosfera . . . . $= ga\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}\right)$, valore un poco diverso da ga, qual esser doveva, e quale si è assunto in principio. Intorno a questo paradosso io faccio il seguente riflesso, che mi pare abbastanza soddisfacente per acquietare lo spirito, e sciogliere il nodo: Se nella formola della densità $y = \Delta e^{\frac{\Delta r(r-x)}{ax}}$ si fa $x = \infty$, risulta $y = \frac{\Delta}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}$, che mostra dover esser finita la densità dell' aria anche ad un' altezza infinita in quest' ipotesi della gravità proporzionale al quadrato inverso della distanza dal centro terrestre, e delle densità degli strati aerei proporzionali ai pesi comprimenti. Ora questa legge delle densità richiede manifestamente, che dovunque essa trovasi finita, ivi sia pure finito il peso superiore comprimente. Dunque al termine di quell' altezza infinita dobbiamo immaginarci un altra colonna aerea, che di là s' alza ancor essa senza fine, e produce colla sua pressione sopra quel termine la densità $\frac{\Delta}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}$ dello strato aereo. Il peso poi di questa seconda colonna si scopre immediatamente

mercè la stessa legge della densità, in vigor della quale si ha l'analogia $\Delta : \frac{\Delta}{e^{\frac{\Delta r}{a}}} :: ga : \frac{ga}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}$; ond' è il detto peso $= \frac{ga}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}$. Siccome pertanto il peso ga di tutta la colonna aerea risulta dal peso della prima colonna infinitamente alta, ed inoltre da quello della seconda colonna infinitamente alta sopra la prima; si avrà quindi il peso della prima colonna con sottrarre dal peso totale ga il peso $\frac{ga}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}$ della seconda; e conseguentemente $ga\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r}{a}}}\right)$ è l'espressione del peso della colonna aerea d'infinita altezza, come appunto abbiamo ritrovato.

112. Cor. Se si suppone, che la gravità terrestre seguiti la ragione di una potenza inversa n delle distanze dal centro della terra, allora il peso dell'elemento Nn trovasi $= \frac{gr^n ydx}{x^n}$; ed inoltre $\frac{dy}{y} = -\frac{\Delta r^n dx}{ax^n}$, e questa integrata dà $log. y = \frac{\Delta r^n}{(n-1)ax^{n-1}} + Cost.$, dove per essere $y = \Delta$ quando $x = r$, diventa $Cost. = log. \Delta - \frac{\Delta r}{(n-1)a}$; e però $log. \frac{y}{\Delta} = \frac{\Delta r(r^{n-1} - x^{n-1})}{(n-1)ax^{n-1}}$, e pas-

sando ai numeri, $y = \Delta e^{\frac{\Delta r(r^{n-1} - x^{n-1})}{(n-1)ax^{n-1}}}$ $= \frac{\Delta}{e^{\frac{\Delta r(x^{n-1} - r^{n-1})}{(n-1)ax^{n-1}}}}$. Sostituisco questo valore in $\int \frac{gr^n y dx}{x^n}$, e sarà il peso della colonna indeterminata $TN =$ . . . .

$$\Delta g r^n e^{-\frac{\Delta r}{(n-1)a}} \int \frac{dx}{x^n} e^{\frac{\Delta r^n}{(n-1)ax^{n-1}}} = \dots$$

$$\Delta g r^n e^{-\frac{\Delta r}{(n-1)a}} \times -\frac{a}{\Delta r^n} e^{\frac{\Delta r^n}{(n-1)ax^{n-1}}} +$$

$Cost. = -gae^{\frac{\Delta r(r^{n-1} - x^{n-1})}{(n-1)ax^{n-1}}} + Cost.$; e perchè svanisce un tal peso quando $x = r$; nasce quindi $Cost. = ga$, e finalmente il peso di $TN =$ $ga\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r(x^{n-1} - r^{n-1})}{(n-1)ax^{n-1}}}}\right)$. Fatta ora $x = \infty$ e supposto $n > 1$, risulta il peso della colonna d'aria di altezza infinita $= ga\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r}{(n-1)a}}}\right)$, intorno alla qual espressione torna in acconcio lo

stesso raziocinio, che abbiamo fatto nello scolio precedente.

113. Qualora si supponga la gravità costante, e conseguentemente $n = 0$, scopresi il peso di

$$TN = ga\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)}{-a:x}}}\right] =$$

$$ga\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta}{a}(x - r)}}\right],$$ dove presa $x = \infty$ nasce il peso della colonna aerea d'infinita altezza espresso da ga, e ciò perchè in quest'ipotesi della gravità costante la densità y diventa $= \ldots$

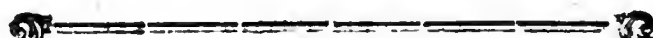
$$\frac{\Delta}{e^{\frac{\Delta}{a}(x - r)}}$$, cioè nulla ad un'altezza infinita x.

114. Questo stesso succede tutte le volte che si assume la gravità terrestre operante in una ragione minore della semplice inversa delle distanze dal centro della terra, vale a dire allorchè $n < 1$. In fatti allora sarà $n - 1$ un rotto negativo, che chiameremo $-\lambda$; ed avremo il peso di $TN =$

$$ga\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r(x^{-\lambda} - r^{-\lambda})}{-\lambda a x^{-\lambda}}}}\right] = \ldots\ldots$$

$$ga\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{\Delta r^{1-\lambda}}{\lambda a}(x^{\lambda} - r^{\lambda})}}\right],$$ il quale diviene manifestamente $= ga$ prendendo $x = \infty$. Ma appunto in quest'ipotesi scopresi infinitamente piccola la densità dell'aria ad un'infinita altezza, cioè

$$y = \frac{\Delta}{e^{\frac{\Delta r^{1-\lambda}}{\lambda a}(x^{\lambda} - r^{\lambda})}} = \text{o quando } x = \infty.$$



ARTICOLO X.

Sul Moto Curvilineo in un solo piano.

16. 115. Supposto, che il corpo (considerato come un punto) si muova nella linea curva *EMG* (Fig. 16) a *semplice curvatura*, cioè situata in un medesimo piano, si ottiene tutta la determinazione del suo moto per mezzo delle due coordinate, cioè a dire si può assegnare per un tempo dato qualunque il luogo dove il corpo si trova, nel modo seguente.

Nel piano, in cui è situato lo spazio curvilineo percorso dal corpo, si prendano ad arbitrio le due rette direttrici AB, AC congiunte sotto un angolo dato qualunque $BAC = \lambda$, ed a queste si riferisca il moto del corpo. Sia $EM = s$ lo spazio scorso dal corpo nel tempo t, e da M si conducano MY, MX parallele alle direttrici, e facciasi $YM = AX = x$, $AY = XM = y$. Se pertanto si potranno assegnare pel tempo t i valori di x, y, si renderà noto il luogo M del corpo per tal tempo, venendo espressa la natura della curva EMG dalla relazione fra x, ed y. Siccome poi l'angolo delle direttrici $BAC = \lambda$ è supplemento dell'angolo MNm, si avrà pel tempuscolo dt l'elemento dello spazio $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + 2dxdy \cos.\lambda + dy^2)}$. La velocità del corpo in M trovasi $= \frac{ds}{dt} =$

$\frac{1}{dt} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + 2dxdy \cos. \lambda)}$. Per riguardo alla direzione del moto, si trova facilmente l'angolo fatto da tal direzione colla direttrice AC, il quale è $= mMN$, e si ha $tang.\, mMN = \frac{dy\, sen.\, \lambda}{dx + dy \cos.\, \lambda}$, e $sen.\, mMN = \frac{dy\, sen.\, \lambda}{ds}$. Così pure l'angolo fatto dalla direzione Mm del moto coll'altra direttrice AB, ovvero l'angolo eguale MmN ha per tangente $\frac{dx\, sen.\, \lambda}{dy + dx \cos.\, \lambda}$, e per seno $\frac{dx\, sen.\, \lambda}{ds}$.

116. A quel modo, che per mezzo delle coordinate $AX = x$, $XM = y$ si determina il luogo M della Curva, così per mezzo de' loro elementi dx, dy si assegna il luogo susseguente m; ed il corpo partendo da M ed arrivando in m nel tempuscolo dt, viene trasportato secondo la direzione AC per lo spazietto dx, e secondo la direzione AB per lo spazietto dy. Quindi è, che se si risolve il moto del corpo in due moti secondo le direzioni fisse AC, AB, dalla sua velocità attuale $\frac{ds}{dt}$ risultano le due velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ secondo le predette direzioni.

117. Se le direttrici sono normali, cioè λ è un angolo retto, il calcolo diventa molto più semplice, e si ha $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $tang.\, mMN = \frac{dy}{dx}$, $sen.\, mMN = \frac{dy}{ds}$, $tang.\, MmN = \frac{dx}{dy}$, $sen.\, MmN = \frac{dx}{ds}$.

118. Siccome nella Geometria si suole esprimere la natura delle Curve a semplice curvatura o per mezzo di due coordinate, o anche talvolta per mezzo degli angoli intorno ad un punto fisso, e delle distanze dal medesimo punto, sarà mestieri di esaminare il moto curvilineo de' corpi nello stesso piano anche in quest' altra maniera, vale a dire

riferendolo ad un punto fisso per mezzo degli angoli intorno a tal punto percorsi, e dei raggi vettori, o delle distanze dal medesimo. Sia dunque
17. *AM* (Fig. 17.) la curva descritta dal mobile, e nel suo piano si prenda quel punto fisso *F*, che possa giudicarsi più acconcio alla determinazione del moto; indi guidato al principio *A* del moto il raggio vettore *FA*, se per qualsivoglia dato tempo *t*, in cui il corpo arriva in *M* si potrà determinare così l'angolo $AFM = \varphi$, come la distanza $FM = z$, si renderà perfettamente noto il moto del corpo: imperciocchè mediante la relazione tra z, e φ viene rappresentata la natura della Curva *AM*, e per mezzo dei differenziali viene espressa la velocità, e la direzione del moto. In fatti supponendo, che nel tempuscolo dt il mobile arrivi da *M* in *m*, e l'angolo $AFM = \varphi$ riceva l'incremento $MFm = d\varphi$, e il raggio vettore $FM = z$ l'incremento $Rm = dz$, si avrà l'archetto circolare $MR = zd\varphi$, ed $Mm = \sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}$. Quindi è che la velocità del corpo in *M* sarà $= \frac{\sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}}{dt}$, e la direzione del moto si conoscerà dall'angolo *AMF*, ovvero *MmR*, il quale ha per tangente $\frac{zd\varphi}{dz}$. E per tal modo si ottiene la totale determinazione del moto.

119. Poichè il corpo nel tempo t descrive intorno al punto fisso *F* l'angolo *AFM*, e si trova in *M* lontano da *F* per l'intervallo *MF*, si può riguardare il suo moto come doppio, uno *angolare* intorno al punto *F*, l'altro *diretto*, con cui si scosta dallo stesso punto, o ad esso si accosta. E siccome nell'istante dt l'angolo φ cresce dell'elemento $d\varphi$, la frazione $\frac{d\varphi}{dt}$ esprimerà quella, che nominasi *velocità angolare*; á quel modo, che cre.

scendo in detto istante il raggio vettore z del suo elemento dz, la frazione $\frac{dz}{dt}$ esprimerà la *velocità di scostamento* dal punto fisso F.

Conosciuta poi l'una e l'altra velocità, tanto l'angolare, quanto di scostamento, si potrà sempre assegnare non solo la vera ed attuale velocità del corpo, ma anche la sua direzione, ed inoltre la Curva da esso percorsa.



ARTICOLO XI.

Sul moto Curvilineo in differenti piani.

120. Qualora il corpo si muove per una Curva a *doppia curvatura EMS* (Fig. 18), cioè situata in 18.
piani diversi, per ridurre a calcolo il suo movimento, conviene riferirlo a tre direzioni fisse AB, AC, AD, ciascuna coppia delle quali è situata in un piano differente, e tutte si uniscono in un punto fisso A, che per maggior comodo e semplicità sarà il luogo, al quale s'intende di riferire il moto proposto. Essendo libera l'elezione delle tre mentovate direttrici, si assumono in grazia della brevità l'una all'altra perpendicolari, cosicchè AC, AB sieno situate nel piano della Tavola, ed AD sia normale ad esso piano. Supposto ora, che il mobile abbia scorso nel tempo t l'arco $EM = s$, dal punto M si guidino le tre coordinate ortogonali $MY = z$, $YX = y$, $XA = x$ parallele rispettivamente alle tre direttrici DA, CA, BA. La natura della curva EMS viene definita da una doppia equazione fra le dette tre coordinate; e perciò se per

un qualunque dato tempo t si potranno assegnare i valori delle medesime, resterà parimente determinato il luogo M del mobile per quel tempo. Essendo poi l'elemento Mm dello spazio, cioè $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, e questo descritto dal mobile nell'istante dt, nasce la velocità del mobile in $M = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{dt}\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Per riguardo alla direzione Mm del moto, basta considerare le tre coordinate my, yx; xA infinitamente vicine alle prime, e prolungare la yY sino al concorso T colla direttrice AB, dal che si ha $XT = \frac{ydx}{dy}$. Per YT si concepisce passare un piano normale al piano BAC: un tal piano passerà per l'elemento Mm, e quest' elemento prolungato formerà colla retta YT un angolo, la di cui tangente $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, e il seno $= \frac{dz}{ds}$. Di più la direzione Mm del moto forma colla retta guidata per M parallelamente alla direttrice AB un angolo avente per coseno $\frac{dx}{ds}$, colla retta menata per M parallela alla direttrice AC un angolo dotato del coseno $\frac{dy}{ds}$, e colla retta, che per M si tira parallela alla direttrice AD, un angolo, il di cui coseno è $\frac{dz}{ds}$. Con che si ha la compita determinazione del moto proposto.

121. E' evidente, che qui si considera l'elemento $Mm = ds$ dello spazio percoso come la diagonale d'un parallelepipedo, i di cui lati sono dx, dy, dz paralleli alle tre direttrici AB, AC, AD, e queste essendo normali, e però rettangolo il parallelepipedo risulta la diagonale $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Che se le direttrici fossero oblique,

e l'angolo $BAC = \omega$, $BAD = \phi$, $CAD = \theta$, e le coordinate x, y, z si menassero parallele alle dette direttrici, allora risulterebbe $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy \cos.\omega + 2dxdz \cos.\phi + 2dydz \cos.\theta)}$. Ciò si dimostra col seguente discorso.

1.° Siano BE, AF (Fig. 19.) parallele, e BA 19.
perpendicolare ad esse. Da un punto C preso fuori del loro piano si tirino sulle medesime le perpendicolari CE, CF; sarà $BE = AF$.

Si guidi EF, e dal punto C la retta CO parallela a BE. Sarà CO parallela anche ad AF, e quindi perpendicolare nel punto C a CE, e CF, cioè al piano ECF. Dunque BE ed AF sono perpendicolari all'istesso piano, e quindi ad EF. Dunque EF è parallela ad AB, e $BE = AF$.

2.° Sia adesso il parallelogrammo $CDAB$ (Fig. 20.), 20.
e sulla retta CE condotta dall'angolo C fuori del piano del parallelogrammo si tirino le perpendicolari AM, BN, DP. Dal punto B si tiri BQ parallela a CE, e da A sovra essa la perpendicolare AQ. Sarà $CP = BQ$, perchè AB è parallela ed uguale a CD, BQ parallela a CP, e gli angoli in P e Q retti. Ma $BQ = NM$ (1.°); dunque $CP = NM$, e $CM = CP + CN$. Ora $CM = AC.\cos.ACE$, $CP = CD.\cos.DCE$, $CN = CB.\cos.BCE$. Dunque $AC.\cos.ACE = CD.\cos.DCE + BC.\cos.BCE$.

Si abbia adesso il parallelepipedo obliquangolo
come nella (Fig. 21.). Sarà 21.
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos.ABC$;
$AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC.CE.\cos.ACE$.

Ma (2.°) $AC.\cos.ACE = BC.\cos.BCE + DC.\cos.DCE$. Dunque $AE^2 = DC^2 + BC^2 + CE^2 + 2BC.DC.\cos.BCD - 2BC.CE.\cos.BCE - 2DC.CE.\cos.DCE = AB^2 + AD^2 + AG^2 + 2AB.AD.\cos.BAD + 2AD.AG.\cos.DAG + 2AB.AG.\cos.BAG$.

Da ciò si rende manifesto, che il valore di ds è appunto il precedentemente assegnato; avve.

gnacchè ds è la diagonale d' un parallelepipedo obliquangolo avente per lati dx , dy , dz , e per angoli da essi formati ω, φ, θ.

122. Potendo variare in infinite maniere la posizione delle tre direttrici AB , AC, AD , lo stesso moto può rappresentarsi in infiniti modi. Innoltre, quand' anche il corpo si muova in una Curva a semplice curvatura, si può sempre, come ciò fosse ignoto, riferire il suo moto alle stesse tre direttrici . Per tal modo resta risoluto il moto del corpo in tre moti paralleli alle tre direttrici , a ciascuno de' quali moti compete la sua propria velocità secondo quella direzione; e qneste velocità poi insieme combinate somministrano la velocità attuale del corpo non meno che la direzione del suo moto. Con siffatto ripiego di queste tre velocità, che si concepiscono nel corpo parallelamente alle tre direttrici, vengono notabilmente abbreviati e facilitati i calcoli, i quali per mancanza di tal ripiego riuscirono all' Eulero ne' due tomi della sua Meccanica, come egli stesso confessa, *troppo intricati*.

123. L' artifizio della riferita risoluzione del moto tutto si riduce a questo semplicissimo principio di Meccanica: cioè se un mobile scorre nel
21. tempo t con moto uniforme la retta AE (Fig. 21), sicchè la sua velocità sia $= \frac{AE}{t}$, si menino dai due estremi A, E della retta descritta le rette AB, AD, AG, ed EH, EF, EC rispettivamente parallele a tre rette date di posizione, e situate a due a due in differenti piani, e si prolunghino fino a che ciascuna di esse, la qual si mena da un estremo di AE, incontri il piano di due altre, che si guidano dall'altro estremo, e nascerà per tal modo un parallelepipedo $HABE$, di cui AE è la dia-

gonale; ed il moto per AE, la di cui velocità è $= \frac{AE}{t}$, resterà risoluto ne' tre moti per AB, AD, AB, le velocità de' quali sono rispettivamente $\frac{AB}{t}$, $\frac{AD}{t}$, $\frac{AG}{t}$. Da queste tre celerità si verrà a conoscere la velocità effettiva del corpo per la diagonale AE, come pure la direzione del suo moto per rapporto alle tre direttrici fissate. È di per se evidente, che tutto ciò ha luogo anche allor quando AE è l' elemento d' una Curva qualunque descritto dal mobile nel tempuscolo dt, risolvendosi sempre la velocità $\frac{AE}{dt}$ nelle tre $\frac{AB}{dt}$, $\frac{AD}{dt}$, $\frac{AG}{dt}$ secondo tre date qualunque direzioni.

124. Resta ora per ultimo da spiegare la maniera, con cui il moto del corpo per una Curva qualunque a doppia curvatura si può computare ed esprimere riferendolo ad un piano dato, e ad un punto qualunque assunto in tal piano per mezzo degli angoli da esso descritti intorno a quel punto.

Sia pertanto il piano, a cui si riferisce il moto, rappresentato dalla tavola, in cui sia O (Fig. 22) il punto fisso, che riguardasi come centro del moto. 22.
Muovasi il corpo fuori di questo piano nella linea GM, e nel tempo t giunga da G in M, d' onde si tiri la normale MP al piano, e si congiungano al punto fisso le MO, PO. Piglisi nel detto piano una direzione fissa OA; e si fa manifesto, che si potrà per un dato tempo t assegnare il luogo M del mobile ogni qualvolta si potrà assegnare 1.° l' angolo $AOP = \varphi$; 2.° l' angolo $POM = \psi$; 3.° la distanza $OP = z$.

A quest' effetto, menisi da M la tangente MT della curva, e si produca sino al concorso col piano dato in T, e da T si conduca ad O la retta TO, la quale è detta *linea de' nodi*, ed è l' interse

zione del piano, che passa per l'elemento *Mm* della Curva e pel punto fisso *O*, col piano dato. Sia dunque pel momento, che il mobile descrive l'elemento *Mm*, l'angolo $AOT = \omega$, e l'inclinazione del piano *OmMT* al piano assunto sia $= \rho$; e se questi due angoli ω, ρ del pari che l'angolo $AOP = \varphi$, e la distanza $OP = z$ saranno conosciuti per un dato tempo t, si potrà agevolmente assegnare il luogo *M* del mobile nella Trajettoria, vale a dire l'angolo $POM = \psi$ unitamente alla distanza $OM = \frac{z}{cos.\psi}$. Si conduca perciò da *P* la normale *PN* alla linea de' nodi, e si giunga *NM*; e sarà l'angolo $MNP = \rho$, essendo la misura dell' inclinazione del piano *OnMT* al piano assunto. Dall'essere poi l'angolo $TOP = \varphi - \omega$ ne viene $PN = z\,sen.(\varphi - \omega)$, ed $ON = z\,cos.(\varphi - \omega)$; e quindi $MP = z\,sen.(\varphi - \omega)\,tang.\rho$, ed $MN = \frac{z\,sen.(\varphi - \omega)\,tang.\rho}{sen.\rho} = \frac{z\,sen.(\varphi - \omega)}{cos.\rho}$. Oltracciò si ha $OM = \sqrt{(NM^2 + NO^2)} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{z}{cos.\rho}\sqrt{\left(sen.(\varphi - \omega)^2 + cos.(\varphi - \omega)^2 cos.\rho^2\right)} = \frac{z}{cos.\rho}\sqrt{\left(1 - cos.(\varphi - \omega)^2 sen.\rho^2\right)}$, e $tang.\,MOP = tang.\psi = \frac{MP}{PO} = sen.(\varphi - \omega)\,tang.\rho$. Siccome pertanto così l'angolo $AOT = \omega$, come $MNP = \rho$ appartengono tanto al punto *M* della Curva dove il mobile si trova nel principio del tempuscolo dt, quanto al punto susseguente *m*, dove si trova alla fine di detto tempuscolo, perciò nel differenziare l'angolo ψ, per la qual differenziazione si passa dal punto *M* al susseguente *m*, si potranno considerare come costanti gli angoli ω, ρ, che entrano nella sua espressione; onde nascerà $d.\,tang.\psi =$

$\frac{d\psi}{\cos.\psi^2} = d\varphi.\cos.(\varphi - \omega)\,tang.\rho$. Ma il punto m è anche il principio dell' altro elemento susseguente ad Mm, e per quest' altro elemento variano gli angoli ω, ρ. Dunque nel differenziare l' angolo ψ sarà anche permesso di riguardare come variabili ω, ρ, e questo nuovo differenziale dovrà essere uguale al primo. Sicchè si avrà $\frac{d\psi}{\cos.\psi^2} =$ $(d\varphi - d\omega)\cos.(\varphi - \omega)\,tang\,\rho + \frac{d\rho}{\cos\,\rho^2}\,sen.(\varphi - \omega)$ $= d\varphi.\cos.(\varphi - \omega)\,tang.\rho$; dal che ne deriva l' equazione $\frac{d\omega}{tang.(\varphi - \omega)} = \frac{d\rho}{sen.\rho\cos.\rho} = d.\,log.\,tang.\rho$, la quale rappresenta il rapporto fra la progressione istantanea della linea de' nodi, e la variazione dell' inclinazione ρ dell' orbita.

Ritrovato poi l' angolo ψ per mezzo della formola $tang.\psi = sen.(\varphi - \omega)\,tang.\rho$, si trova indi la distanza $OM = \frac{z}{\cos.\psi}$.

125. Poichè gli angoli ω, ρ dipendono l' uno dall' altro in maniera, che la loro mutua relazione è espressa dalla formola $\frac{d\omega}{tang.(\varphi - \omega)} = \frac{d\rho}{sen.\rho\cos.\rho}$, è evidente, che restando lo stesso l' angolo ω, dee rimanere la stessa anche l' inclinazione ρ, ed il moto del corpo farsi nel medesimo piano. Il criterio adunque del muoversi il corpo nel medesimo piano, che passa pel punto fisso O, è fondato sull' invariabilità degli angoli ρ, ed ω.

126. Mentre il corpo attraversa il piano assunto, dee trovarsi nella linea de' nodi OT, e però $tang.\,TOP = tang.(\varphi - \omega) = 0$. Laonde $d\omega = \frac{d\rho\,tang.(\varphi - \omega)}{sen.\rho\cos.\rho} = 0$, vale a dire, la linea de' nodi resta immobile comunque varj l' inclinazione ρ.

127. Ma se l'angolo $TOP = \varphi - \omega$ sarà retto, e conseguentemente $tang.(\varphi - \omega) = \infty$, sarà $d\rho = \frac{d\omega\, sen.\, \rho\, cos.\, \rho}{tang.\,(\varphi - \omega)} = 0$, che è quanto dire l'inclinazione non varia nel tempuscolo dt comunque si muova la linea de' nodi.

128. Se si volesse con questo metodo ritrovare l'espressione dell'elemento Mm della Trajettoria, e quindi determinare la velocità e la direzione del moto, s'incontrerebbono formole troppo complicate. Per ovviare adunque a questo inconveniente, si può intavolare il calcolo nella maniera che segue: Cerchisi pel dato tempo la posizione della linea de' nodi ossia l'angolo $AOT = \omega$, e parimente l'inclinazione $MNP = \rho$, e poscia nel piano $TOmM$, in cui si concepisce muoversi il corpo nel tempuscolo dt, l'angolo $TOM = \lambda$, ed insieme la distanza $OM = v$. Ciò posto, sarà $ON = v\, cos.\, \lambda$, $MN = v\, sen.\, \lambda$; e quindi $MP = MN.\, sen.\, MNP = v\, sen.\, \lambda\, sen.\, \rho$, e $PN = MN.\, cos.\, MNP = v\, sen.\, \lambda\, cos.\, \rho$. Da ciò si ricava il valore dell'angolo $MOP = \psi$, e si ha $sen.\, \psi = \frac{MP}{MO} = sen.\, \lambda\, sen.\, \rho$. Innoltre si deduce $tang.\, TOP = tang.\,(\varphi - \omega) = \frac{NP}{NO} = \frac{sen.\, \lambda\, cos.\, \rho}{cos.\, \lambda} = tang.\, \lambda\, cos.\, \rho$; e conseguentemente la relazione fra i differenziali $d\omega$, $d\rho$ viene rappresentata dall'equazione

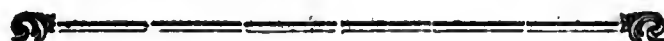
$$\frac{d\omega}{tang.\, \lambda\, cos.\, \rho} = \frac{d\rho}{sen.\, \rho\, cos.\, \rho},$$

ovvero $$d\omega = \frac{d\rho\, tang.\, \lambda}{sen.\, \rho}.$$

Finalmente si trova l'elemento $Mm = \sqrt{(dv^2 + v^2 d\lambda^2)}$, e la velocità del moto per $Mm = \frac{1}{dt} \sqrt{(dv^2 + v^2 d\lambda^2)}$, ed in fine la dire-

zione del moto per Mm nel piano $TOmM$ s'inclina alla retta OM sotto l'angolo OMT, la di cui tangente è $= \frac{vd\lambda}{dv}$.

Nell'Astronomia, dove si fa uso di un tal metodo, suole chiamarsi l'angolo MOP *latitudine* del corpo, l'angolo AOP *longitudine* del medesimo, l'angolo AOT *longitudine del nodo*, e l'angolo TOM *argomento della latitudine*.



ARTICOLO XII.

Sulle Trajettorie in un piano, ossia a semplice curvatura.

I.

Nel moto libero.

129. Siavi un corpo (concepito come un punto), il quale venendo sollecitato da quante potenze si voglia descriva nell'istante dt l'elemento infinitesimo (Fig. 23.) $Ff = ds$ di una Curva qualunque 23.
EG. Se giunto in f, cessasse l'azione delle potenze acceleratrice, il corpo seguiterebbe a muoversi uniformemente in linea retta nella sua prima direzione Fff', e descriverebbe nell'istante seguente dt', ovvero $dt + ddt$ lo spazietto $ff' = \frac{dsdt'}{dt}$, essendo nel moto equabile gli spazj proporzionali ai tempi. Ma siccome anche in f seguitano le potenze a sollecitare il corpo, dovrà esso sentirne l'azione e quindi abbandonare quella direzione, e piegare in un'altra. Potranno tutte quelle potenze pe' principj Meccanici esser ridotte a due, una secondo

Fff', che si chiama *forza tangenziale*, e si fa $= T$, l'altra secondo fS perpendicolare ad Fff', che si nomina *forza normale*, e si fa $= N$.

130. La prima di queste due forze accelera la velocità v del mobile nella direzione ff', e lo fa giugnere in f'' alla fine dell'istante dt'. Conseguentemente l'aumento della velocità sarà $dv = Tdt'$.

131. Per lo contrario la forza normale non altera punto il moto del corpo, ma fa soltanto variare la sua direzione obbligandolo a percorrere lo spazietto fH, ovvero $f'\varphi$ perpendicolare ad ff'. E siccome a scorrere tale spazio nell'istante dt' si richiede la velocità espressa da $\frac{f'\varphi}{dt'}$, e questa velocità è generata dalla forza normale N nel detto istante, si ha perciò $\frac{f'\varphi}{dt'} = Ndt'$, ovvero $f'\varphi = Ndt'^2$.

132. Trovandosi pertanto il corpo dopo l'istante dt' nel punto φ in virtù di queste due forze e della velocità, con cui si muove sulla sua Trajettoria, avrà in conseguenza descritto nel detto istante il secondo elemento $f\varphi$, ovvero ds', ovvero $ds + dds$ della Trajettoria. Dicasi R il raggio osculatore di questa Curva in f: si sa dalla Geometria, che $f'\varphi = \frac{ds^2}{R}$. Perlocchè sostituito questo valore, e parimente dt in luogo di dt' (per essere $dt' = dt + ddt$) nelle precedenti equazioni, esse diverranno (essendo $v = \frac{ds}{dt}$)

1.ª $dv = Tdt$

2.ª $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = R.N$

3.ª $Tds = vdv$.

24. 133. Sia ora AGg (Fig. 24.) la Curva, che il mobile descrive in virtù delle forze acceleratrici

qualunque, da cui incessantemente è sollecitato, e in virtù della velocità di projezione statagli impressa secondo una data direzione nel principio del suo moto. Sia AC l'asse della Curva, GQ la tangente, GC la normale al punto G; e facciasi $AE = x$, $EG = y$, l'archetto elementare $Gg = ds$, e il raggio osculatore in $G = R$, il quale avrà per espressione, come è noto dal Calcolo Infinitesimale, $\frac{-ds^3}{dx^2 d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Innoltre la velocità del mobile per la Curva nel punto G si ponga $= v$, e chiamata g la gravità terrestre nella nostra latitudine, cioè $g = \frac{30,2^{\text{pi.}}}{(1'')^2}$, si nomini h l'altezza dovuta alla detta velocità v, sicchè sia $h = \frac{v^2}{2g}$; e finalmente sia t il tempo impiegato dal mobile a scorrere l'arco indefinito AG. Ciò fatto si offre l'equazione $v^2 = R.N = 2gh$. Dunque la forza normale sta alla gravità terrestre, come l'altezza dovuta alla velocità del mobile sta alla metà del raggio osculatore.

134. Ridotte tutte le forze acceleratrici alle due T, N secondo la tangente GS, e la normale GC, e moltiplicata per $v = \frac{ds}{dt}$ l'equazione ritrovata $dv = Tdt$, ne nasce $vdv = Tds$, il di cui integrale è $v^2 = 2\int Tds$. Da ciò si ricava $R.N = 2\int Tds$. Quest'equazione non contiene nè v, nè t, poichè le due forze N, T sono funzioni di x, e di y; dunque ella darà mediante tre integrazioni l'equazione finita della Trajettoria.

135. I sintomi del moto del corpo per la Trajettoria vengono somministrati dalle due equazioni

$v^2 = 2\int T ds$, $t = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int T ds}}$, le quali faranno conoscere la velocità del mobile in qualunque punto della Curva, ed il tempo da esso impiegato a giugnere ad un punto proposto.

136. Tutte le forze acceleratrici del mobile possono ridursi in vece di N, T a due altre, una nella direzione GP parallela alle x, l'altra nella direzione GL parallela alle y. Quella, che chiameremo X, accelera il moto del corpo secondo l'asse delle ascisse; questa, che nomineremo Y, accelera il moto secondo l'asse dalle ordinate.

137. La velocità del mobile nel punto G, espressa dall'archetto $Gg = ds$ descritto nell'istante dt si risolva nelle due $Gh = dx$, e $hg = dy$, quella secondo GP parallelamente alle ascisse, questa secondo GL parallelamente alle ordinate. Perlocchè essendo la velocità effettiva del mobile nel punto G della Trajettoria $= v = \frac{ds}{dt}$, la sua velocità parallelamente all'asse delle ascisse sarà $= \frac{dx}{dt}$, e la velocità parallelamente all'asse delle ordinate sarà $= \frac{dy}{dt}$.

138. Siccome adunque l'aumento della velocità è sempre uguale al prodotto della forza acceleratrice, che lo genera, per l'elemento del tempo, si avranno le due equazioni seguenti

$$1.^a \quad X dt = d.\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

$$2.^a \quad Y dt = d.\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

le quali combinate coll'equazione ordinaria $v = \frac{ds}{dt}$ bastano a far conoscere la Trajettoria, ed il moto del corpo per quella. Ed in tal modo si ottiene

una seconda soluzione del *Problema delle Forze Centrali*, diversa da quella de' §.§. 134. 135.

139. Se le due precedenti equazioni si moltiplicano la prima per $\frac{dx}{dt}$, la seconda per $\frac{dy}{dt}$, e si avverte, essere $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, e però $vdv = \frac{dx}{dt}d.\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d.\left(\frac{dy}{dt}\right)$, se ne ricavano queste altre tre equazioni

1.ª $Xdx = \frac{dx}{dt}d.\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

2.ª $Ydy = \frac{dy}{dt}d.\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

3.ª $Xdx + Ydy = vdv = \frac{dx}{dt}d.\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d.\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

140. Se nelle due equazioni del §. 138. si eseguiscono le differenziazioni indicate, ne risulta $Xdt^3 = dtddx - dxddt$, ed $Ydt^3 = dtddy - dyddt$, e da quest'ultima si ha $ddt = \frac{dtddy - Ydt^3}{dy}$, che sostituito nella prima somministra $Xdt^3 = dtddx - \frac{dxdtddy + Ydxdt^3}{dy}$; e quindi si deduce $dt^2(Ydx - Xdy) = dxddy - dyddx = \ldots dx^2 d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

141. Ora poichè $R = \frac{ds^3}{-dx^2 d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, cioè $dx^2 d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{ds^3}{R}$, sostituito questo valore nell'equazione del §. precedente, nasce $\frac{ds^3}{R} =$

$= dt^2(Xdy - Ydx)$; onde per ultimo $\frac{ds^2}{Rdt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{Xdy - Ydx}{ds}$.

142. Si ritrovano le forze N, T espresse per X, Y con risolvere queste ultime in altre due secondo le due direzioni normale, e tangenziale alla Curva. Imperciocchè presa $GP = X$, ed abbassata la perpendicolare PS sulla tangente la similitudine de' triangoli GPS, Ggh dà $SP = GI = \frac{dy}{ds}X$, e $GS = \frac{dx}{ds}X$. Parimente prendendo $GL = Y$, e menando sulla tangente la perpendicolare LO, la similitudine de' triangoli LGO, Ggh somministra $GO = \frac{dy}{ds}Y$, ed $OL = GK = \frac{dx}{ds}Y$. Da ciò apparisce, che tutta la forza tangenziale secondo GS è $= GS + GO$, e che tutta la forza normale secondo GC è $= GI - GK$. Di qui derivano le due equazioni

1.ª $T = \frac{Xdx + Ydy}{ds} = \frac{vdv}{ds}$.

2.ª $N = \frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{v^2}{R}$.

143. Qualora il mobile venga sollecitato da una sola forza acceleratrice verso un punto fisso F, la quale sia come una funzione della distanza GF del corpo dal centro della forza, in tal supposto nominando F la detta forza, e presa $GM = F$, indi abbassata sulla tangente la perpendicolare MQ, e col raggio FG descrivendo l'archetto minimo circolare Gn, per la similitudine de' triangoli GMQ, Gng si ha $QM = \frac{GM.Gn}{Gg}$, e $GQ = \frac{GM.gn}{Gg}$. Laonde posto il raggio vettore $FG = r$, l'archetto

circolare $Gn = d\varphi$, e nominate come dianzi N, e T le due forze normale, e tangenziale in direzione di GC, e di GS, risulterà $N = - QM$, $T = GQ$, e quindi le due equazioni seguenti

$$1.^a \quad N = - \frac{Fd\varphi}{ds}.$$

$$2.^a \quad T = \frac{Fdr}{ds}.$$

Da queste due equazioni paragonate con quelle del §. 132. si ricavano le due altre seguenti:

$$3.^a \quad - \frac{Fd\varphi}{ds} = \frac{v^2}{R}.$$

$$4.^a \quad Fdr = vdv.$$

E se inoltre si mena da F sulla tangente GD la perpendicolare $FD = p$, nasce $Gg : Gn :: FG : FD$, ovvero $ds : d\varphi :: r : p$, e quindi $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{p}{r}$, che sostituito nell' equazione 3.ª si deduce l' equazione

$$5.^a \quad - \frac{Fp}{r} = \frac{v^2}{R}.$$

Ma la proprietà del raggio osculatore dà $R = \frac{rdr}{dp}$. Dunque sostituendo nell' equazione precedente questo valore di R si acquisterà l' equazione

$$6.^a \quad - \frac{Fdr}{v^2} = \frac{dp}{p}.$$

Siccome poi integrando l' equazione 4.ª si ottiene $v^2 = 2\int Fdr + Cost.$; da ciò si ricava l' equazione

$$7.^a \quad - \frac{Fdr}{2\int Fdr + Cost.} = \frac{dp}{p}.$$

Questa poi integrata offre l' equazione

$$8.^a \quad log.\, p + Cost. = - \int \frac{Fdr}{2\int Fdr + Cost.},$$

dalla quale si scorge, che essendo data la forza F per una funzione del raggio vettore, o della di.

stanza r si arriva immantinente ad un' equazione della Trajettoria fra il raggio vettore r, e la normale p sulla tangente.

ESEMPIO.

144. Suppongasi un corpo grave terrestre lanciato con una velocità iniziale c sotto un angolo ω colla orizzontale AC, il qual corpo non è animato da altra forza acceleratrice che dalla gravità secondo la verticale GE. In questo caso abbiamo $X = o$, ed $Y = -g$; e conseguentemente (§. 138.) $d.\left(\frac{dx}{dt}\right) = o$, $d.\left(\frac{dy}{dt}\right) = -gdt$. Laonde preso dt per costante, l'integrale della prima equazione dà $\frac{dx}{dt} = Cost.$ E siccome risolvendo la velocità c di projezione in due altre una orizzontale, l'altra verticale risulta l' orizzontale $= c\,cos.\,\omega$, la verticale $= c\,sen.\,\omega$, e però $\frac{dx}{dt}$ nel principio del moto diventa $c\,cos.\,\omega$, quindi è, che sarà $Cost. = c\,cos.\,\omega$, cioè $\frac{dx}{dt} = c\,cos.\,\omega$.

L'altra equazione $d.\left(\frac{dy}{dt}\right) = -gdt$ integrata somministra $\frac{dy}{dt} = -gt + Cost.$; e perchè nel principio del moto la velocità verticale $\frac{dy}{dt}$ diviene $c\,sen.\,\omega$, se ne deduce $Cost. = c\,sen.\,\omega$, e quindi $\frac{dy}{dt} = -gt + c\,sen.\,\omega$.

Integro ora le due equazioni

$$\frac{dx}{dt} = c\,cos.\,\omega,$$

$$\frac{dy}{dt} = c\,sen.\,\omega - gt,$$

ed ottengo dalla prima $x = ct\cos.\omega$, dalla seconda $y = ct\,sen.\omega - \frac{1}{2}gt^2$, senza costante perchè svanisce così x, come y insieme con t. Prendo il valore di $t = \frac{x}{c\cos\omega}$, e lo sostituisco nell'espressione di y, la quale si cangia in $y = x\,tang.\omega - \frac{gx^2}{2c^2\cos.\omega^2}$, che è manifestamente l'equazione della parabola conica.

Per ritrovare il parametro dell'asse di questa parabola, e la posizione di detto asse, trasformo l'equazione, moltiplicandola pes $2c^2\cos.\omega^2$, e mutando i segni, in quest'altra

$$x^2 - \frac{2c^2 sen.\omega\cos.\omega}{g}x = -\frac{2c^2\cos.\omega^2}{g}y,$$

ed aggiunto all'uno e all'altro membro il quadrato della metà dell' coefficiente di x ottengo . . . . .

$$\left(\frac{c^2 sen.\omega\cos.\omega}{g} - x\right)^2 = \frac{2c^2\cos.\omega^2}{g}\left(\frac{c^2 sen.\omega^2}{2g} - y\right).$$

Da ciò si ricava immantinente il parametro dell' asse $= \frac{2c^2\cos\omega^2}{g}$, la distanza dell'asse dal punto di projezione $= \frac{c^2 sen.\omega\cos.\omega}{g} = \frac{c^2 sen.2\omega}{2g}$, l'altezza del vertice della parabola sopra l'orizzontale $AC = \frac{c^2 sen.\omega^2}{2g}$.

La velocità del corpo in G è $= \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)} = \sqrt{(c^2 - 2gct\,sen.\omega + g^2t^2)} = \sqrt{(c^2 - 2gy)}$.

Nell'equazione precedente alla parabola se si fa $y = o$, ci si presenta un doppio valore di x,

FIG cioè $x = 0$, ed $x = \frac{2c^2 sen.\,\omega\, cos.\,\omega}{g} = \ldots$ $\frac{c^2 sen.\,2\omega}{g}$, e questo secondo dà l' ampiezza del getto.

145. Ai medesimi risultati si può pervenire anche senza risolvere la velocità di projezione, ma pigliando invece per linea delle ascisse la direzione stessa di projezione, e per ordinate le verticali. A tale effetto ritengo che il corpo, che si considererà come un punto A, la cui massa $= M$, sia lanciato
25. con una data velocità c nella direzione AF inclinata all' orizontale AB sotto un angolo φ, e durante il suo moto sia questo corpo sempre sollecitato da una forza acceleratrice assoluta costante $= P$ proveniente dalla gravità, e perciò in direzione verticale; e ragiono così: Il punto A proseguirebbe a muoversi per la retta AF colla velocità c in virtù della forza d' inerzia, se non soggiacesse all' azione di nessuna forza acceleratrice. Ma appunto per l' azione continua d' una tal forza è costretto ad abbandonare la retta AF, ed a trovarsi dopo un tempo t in un punto M fuori di detta linea situato da quella parte di AF dove tende la direzione della forza P, cioè verso AB. Da M io faccio cadere la perpendicolare MG, sopra AB, e la prolungo finchè taglia in P la AF. Secondo la direzione MG verrà spinto dalla forza P il punto A giunto che sarà in M. Guido da M la ME parallela ad AF; e prendo AF per linea delle ascisse, ed AC parallela a PG per diametro delle ordinate così che $AP = x$, $PM = y$. Conduco l' ordinata infinitamente prossima pm, e da m la mq parallela ad ME; e nasce $Mn = Pp = dx$, $Mq = nm = dy$. Ora la velocità del punto A per l' archetto Mm, la qual è $\frac{ds}{dt}$, si risolve nelle due

per Mq, ed Mn, cioè in $\frac{dy}{dt}$, e $\frac{dx}{dt}$. La prima $\frac{dy}{dt}$ giacendo nella direzione della forza acceleratrice viene con pieno effetto alterata nel tempuscolo dt dall' azione della forza; e ciò dà l'equazione $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{P}{M}$. La seconda velocità $\frac{dx}{dt}$ non essendo nella direzione della forza, ed impiegandosi altronde una tal forza interamente nel far variare la prima velocità $\frac{dy}{dt}$, non può soffrire nel tempuscolo dt alcun cangiamento, e però il suo cangiamento $\frac{ddx}{dt} = 0$. Integrata la prima equazione nel supposto di dt costante si ottiene $\frac{dy}{dt} = \frac{Pt}{M} + Cost.$; ed integrata la seconda si ha $\frac{dx}{dt} = COST.$ Ma nel principio del moto la velocità $\frac{dx}{dt}$ diventa $= c$; dunque $COST. = c$; e quindi $\frac{dx}{dt} = c$, ed integrando di nuovo $x = ct$ senza costante, perchè svaniscono insieme x, t. Nell' equazione poi $\frac{dy}{dt} = \frac{Pt}{M} + Cost.$ si ritrova $Cost. = 0$, perchè nel principio del moto quando $t = 0$ diviene anche $\frac{dy}{dt} = 0$, cioè diventa nulla la velocità secondo AC per la ragione, che tutta la velocità iniziale c, in cui quivi si converte $\frac{dx}{dt}$, si è già introdotta nell' integrazione precedente senza essersi fatta alcuna risoluzione di tale velocità; onde non resta più luogo a nessuna velocità secondo AC.

Dall' equazione $\frac{dx}{dt} = c$ si è avuto $x = ct$; e l' equazione $\frac{dy}{dt} = \frac{Pt}{M}$ dà $y = \frac{1}{2}\frac{Pt^2}{M}$. Si conosce dunque per ciascun tempo t il luogo M del punto A.

Se presentemente da queste due equazioni si elimina t, trovasi l' equazione della Trajettoria $y = \frac{Px^2}{2c^2M}$, e supponendo la forza P essere la gravità naturale, siechè $\frac{P}{M} = 1$, si ha $y = \frac{x^2}{2c^2}$, ossia $x^2 = 2c^2y$.

146. Nel triangolo APG rettangolo sono noti tutti gli angoli, essendo già dato l' angolo di projezione $FAB = \varphi$. E perchè $AP = x$, sarà $PG = x\, sen.\, \varphi$, $AG = x\, cos.\, \varphi$. Dicasi $AG = z$, $GM = u$; ed avrassi $z = x\, cos.\, \varphi$, $u = x\, sen.\, \varphi - y$; e quindi $x = \frac{z}{cos.\varphi}$, $y = \frac{z\, sen.\, \varphi}{cos.\, \varphi} - u$. Se questi valori di x, y si mettono nell' equazione $x^2 = 2c^2y$, questa si cangia in $\frac{z^2}{cos.\, \varphi^2} = 2c^2\left(\frac{sen.\, \varphi}{cos.\, \varphi}z - u\right)$, cioè in $u = \frac{sen.\, \varphi}{cos.\, \varphi}z - \frac{z^2}{2c^2 cos\, \varphi^2}$, che è l' equazione della parabola conica allorchè un' ordinata all' asse si piglia per linea delle ascisse, ed è retto l' angolo delle coordinate.

147. Essendo $z = x\, cos.\, \varphi$, ed $x = ct$; ne viene $z = ct\, cos.\, \varphi$. Inoltre essendo $y = \frac{t^2}{2}$, ed $u = x\, sen.\, \varphi - y$; ne nasce $u = ct\, sen.\, \varphi - \frac{t^2}{2}$. Per tal modo anche le due equazioni $z = ct\, cos.\, \varphi$; $u = ct\, sen.\, \varphi - \frac{t^2}{2}$ danno per qualunque dato tempo t il vero luogo del corpo grave.

148. La velocità del corpo in M è $= \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dz^2 + du^2)}}{dt}$; e poichè $dz = cdt \cos.\varphi$, $du = cdt \operatorname{sen.}\varphi - tdt$, e però $dz^2 + du^2 = c^2dt^2 + t^2dt^2 - 2ctdt^2 \operatorname{sen.}\varphi$, sarà in conseguenza la detta velocità $= \sqrt{(c^2 - 2ct \operatorname{sen.}\varphi + t^2)}$. Finalmente la tangente dell' angolo fatto dalla direzione del corpo in M colla orizzontale è $= \frac{du}{dz} = \frac{c \operatorname{sen.}\varphi - t}{c \cos.\varphi} = \operatorname{tang.}\varphi - \frac{t}{c \cos.\varphi}$.

149. Nella supposizione, che la forza P fosse la gravità naturale si è fatto $\frac{P}{M} = 1$, perchè si è tacitamente supposto, che la forza *acceleratrice* della gravità fosse $= 1$, e quindi $P = 1 \times M$. Che se vuolsi denominare per g la forza *acceleratrice* della gravità, allora essendo $P = gM$, ne viene $\frac{P}{M} = g$, e però $x^2 = \frac{2c^2y}{g}$. Da quest' equazione si fa uscire la lettera g con esprimere la velocità c per mezzo dell' altezza a, a cui è dovuta, ottenendosi, come è noto, $c^2 = 2ga$; e conseguentemente $x^2 = 4ay$.

II.

Nel moto obbligato.

150. Se il mobile si trovasse richiuso in un canale AGH (Fig. 24) scavato nel medesimo piano 24.
(prescindendo dallo sfregamento), e venisse sollecitato da quali potenze si voglia, per determinare il suo moto nel canale, e la pressione esercitata dal corpo contro il medesimo, convien procedere così: Ridotte tutte le forze sollecitanti alle due

X', Y', questa nella direzione GL parallela alle ordinate, quella in direzione di GP parallela alle ascisse del canale, si osservi, che in quanto il canale cangia la direzione del moto, che il corpo terrebbe, se fosse libero, non agisce contro il corpo se non in direzione perpendicolare al perimetro del canale, senza che in conseguenza risultar possa da tale azione forza alcuna tangenziale ad alterare la velocità del mobile. Si riduca pertanto anche questa forza esercitata dalla resistenza del canale a due altre X'', Y'' secondo le direzioni già mentovate, per modo che la forza totale secondo l'asse delle ascisse sia $= X' + X''$, e la forza secondo l'asse delle ordinate sia $= Y' + Y''$. Ciò fatto, avremo (§. 142.) le due equazioni

1.ª $(X' + X'')dx + (Y' + Y'')dy = vdv$,

2.ª $(X' + X'')dy - (Y' + Y'')dx = \frac{v^2 ds}{R}$.

Ora siccome le forze X'', Y'' in nulla contribuiscono alla produzione dell'incremento dv della velocità pel canale, e la loro azione per tal effetto è $X''dx + Y''dy$, sarà conseguentemente $X''dx + Y''dy = 0$, e quindi la prima equazione diventerà $X'dx + Y'dy = vdv$, la quale farà conoscere la velocità del corpo in qualsivoglia luogo G del canale.

Dalla seconda equazione si ha $\frac{X''dy - Y''dx}{ds}$ $= \frac{v^2}{R} - \frac{-X'dy + Y'dx}{ds}$. Ma il primo membro di quest'equazione esprime l'azione del canale contro il corpo nella direzione normale GC, e conseguentemente la pressione del corpo contro il canale nella direzione opposta GK. Dunque il secondo membro di detta equazione farà conoscere la quantità di tal pressione.

151. Se si muove il corpo pel canale senza essere sollecitato dalle forze acceleratrice X', Y', allora per essere $vdv = 0$, il suo moto non può essere che uniforme; e la pressione contro il canale diventa $= \frac{v^2}{R}$, la quale sempre viene esercitata in direzione opposta a quella del raggio osculatore.

Esempio.

152. Suppongasi, che la figura precedente del canale sia un arco circolare AGH (Fig. 26), e che il corpo sollecitato unicamente dalla gravità terrestre coll'impeto acquistato cadendo per l'arco SA ascenda per l'altro AG. Sia adunque il raggio verticale $BA = r$, l'ascissa orizzontale $AE = x$, l'ordinata $EG = y$, e la velocità del mobile in A sia $= c$. In questo supposto avremo la forza X' secondo $GP = 0$, e la forza Y' secondo $GL = -g$ per essere la direzione GL opposta a quella della gravità terrestre. Laonde l'equazione del moto del corpo si riduce a $-gdy = vdv$, la quale integrata, con avvertire che v diventa c quando $y = 0$, si cangia in $v^2 = c^2 - 2gy$. Parimente l'azione esercitata dal canale contro il corpo nella direzione normale GC (per essere $R = -r$) risulta $= - \frac{v^2}{r} - \frac{gdx}{ds} = - \frac{(c^2 - 2gy)}{r} - \frac{gdx}{ds}$, la quale riuscendo negativa indica l'azione dello stesso canale sul corpo nella direzione opposta GK, e conseguentemente la pressione del corpo in contrario contro il canale in direzione GC sarà $= \frac{gdx}{ds} + \frac{c^2 - 2gy}{r}$. Ma la proprietà del cerchio dà $x = \sqrt{(2ry - y^2)}$, $dx = \frac{rdy - ydy}{\sqrt{(2ry - y^2)}}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ 26.

$\frac{rdy}{\sqrt{(2ry - y^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{r - y}{r}$. Dunque la detta pressione sarà $= \frac{g(r-y)}{r} + \frac{c^2 - 2gy}{r} = g\left(1 + \frac{c^2}{gr} - \frac{3y}{r}\right)$.

Per determinare il tempo, ricorro all'equazione $dt = \frac{ds}{v} = \frac{rdy}{\sqrt{(c^2 - 2gy)}\sqrt{(2ry - y^2)}}$. Cangio quest'espressione in un'altra data per v, sostituendo i valori di $y = \frac{c^2 - v^2}{2g}$, e di $dy = -\frac{vdv}{g}$, ed ottengo $dt = -\frac{2rdv}{\sqrt{(c^2 - v^2)}\sqrt{(4gr - c^2 + v^2)}}$.

Se la velocità c è estremamente picciola rispetto a quella, che il grave acquisterebbe cadendo pel semidiametro r, ovvero rispetto a $\sqrt{2gr}$, e quindi anche v, che non può mai superare c, è estremamente picciola in confronto di c, che è quanto dire se l'arco SA, per cui il grave è disceso, è minimo, in tal caso diventa $dt = -\frac{2rdv}{2\sqrt{gr(c^2 - v^2)}} = -\frac{dv\sqrt{\frac{r}{g}}}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$. Laonde integrando si avrà $t = \sqrt{\frac{r}{g}}$. *Arc. cos.* $\frac{v}{c}$ senza aggiunta di costante, perchè quando $v = c$ svanisce t insieme con *Arc. cos.* $\frac{v}{c}$. Preso poi $v = 0$, si ottiene il tempo della semioscillazione per AG, cioè (essendo π la semiperiferia del cerchio descritto col raggio 1) $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$; onde il tem-

po dell' oscillazione intera per SAG sarà $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$. Se questo tempo dovesse essere di un minuto secon do, risulterebbe $r = \frac{g}{\pi^2}$, che fa conoscere la lunghezza del pendolo a secondi per quella latitu dine, dove si prende il valore della gravità terrestre g, che ne' nostri paesi trovasi $= \frac{30,2^{\text{pi}}}{(1'')^2}$.

153. Per obbligare il corpo a muoversi per una curva data qualunque, egli è evidente, che basta sospenderlo ad un filo perfettamente flessibile ed inestensibile, il quale si applichi ed avvolga ad una lamina, che abbia la figura dell' evoluta della curva proposta: ed in questo caso la tensione del filo equivale alla pressione contro il canale del caso precedente.

154. Muovasi ora il corpo per la Trajettoria ACS (Fig. 27.) continuamente animato da due 27.
forze, una diretta ad un punto fisso F secondo la retta CF, l'altra secondo CP normale alla CF, e cerchisi la distanza CF del corpo dal punto fisso F per un tempo qualunque, e l'angolo AFC.

Prese le coordinate ortogonali $FB = x$, $BC = y$, l'angolo $AFC = \varphi$, il raggio vettore $FC = r$, si ha $x = r\cos.\varphi$, $y = r\,sen.\,\varphi$. Si chiami F la forza sollecitatrice secondo CF, e P la forza secondo CP. Si risolvano entrambe secondo le direzioni CM, CN parallele agli assi delle ascisse, e delle ordinate, e da questa risoluzione risulterà la forza intera secondo $CM = - F\cos.\varphi - P\,sen.\,\varphi$, e la forza intera secondo $CN = P\cos.\varphi - F\,sen.\,\varphi$. Perlocchè il principio delle forze acceleratrici somministrerà le due equazioni

$$ddx = -(F\cos.\varphi + P\,sen.\,\varphi)\,dt^2,$$
$$ddy = -(F\,sen.\,\varphi - P\cos.\varphi)\,dt^2.$$

Moltiplico la prima per $cos.\ \varphi$, la seconda per $sen.\ \varphi$, e ne prendo la somma: indi moltiplico la prima per $sen.\ \varphi$, la seconda per $cos.\ \varphi$, e sottraggo questa da quella. Ciò fatto ho le due equazioni seguenti

$$ddx\ cos.\ \varphi + ddy\ sen.\ \varphi = - Fdt^2,$$
$$ddx\ sen.\ \varphi - ddy\ cos.\ \varphi = - Pdt^2.$$

Inoltre essendo $x = r\ cos.\ \varphi$, $y = r\ sen.\ \varphi$, operando allo stesso modo si trova

$$x\ cos.\ \varphi + y\ sen.\ \varphi = r,$$
$$x\ sen.\ \varphi - y\ cos.\ \varphi = 0.$$

Prendo il differenziale di queste due equazioni, cioè

$$dx\ cos.\ \varphi + dy\ sen.\ \varphi - xd\varphi\ sen.\ \varphi + yd\varphi\ cos.\ \varphi = dr,$$
$$dx\ sen. \quad - dy\ cos.\ \varphi + xd\varphi\ cos.\ \varphi + yd\varphi\ sen.\ \varphi = 0;$$

e per essere $- d\varphi\,(x\ sen.\ \varphi - y\ cos.\ \varphi) = 0$, e $d\varphi\,(x\ cos.\ \varphi + y\ sen.\ \varphi) = rd\varphi$, i due differenziali diventano

$$dx\ cos.\ \varphi + dy\ sen.\ \varphi = dr,$$
$$dx\ sen.\ \varphi - dy\ cos.\ \varphi = - rd\varphi.$$

Differenzio nuovamente queste ultime, ed ho

$$ddx\ cos.\ \varphi + ddy\ sen.\ \varphi - d\varphi\,(dx\ sen.\ \varphi - dy\ cos.\ \varphi) = ddr,$$
$$ddx\ sen.\ \varphi - ddy\ cos.\ \varphi + d\varphi\,(dx\ cos.\ \varphi + dy\ sen.\ \varphi) = - drd\varphi - rdd\varphi,$$

vale a dire

$$ddx\ cos.\ \varphi + ddy\ sen.\ \varphi + rd\varphi 2 = ddr.$$
$$ddx\ sen.\ \varphi - ddy\ cos.\ \varphi + drd\varphi = - drd\varphi - rdd\varphi,$$

ovvero

$$ddx\ cos.\ \varphi + ddy\ sen.\ \varphi = ddr - rd\varphi^2,$$
$$ddx\ sen.\ \varphi - ddy\ cos.\ \varphi = - 2drd\varphi - rdd\varphi,$$

Sostituiti questi valori nelle primitive equazioni, nascono le seguenti

$$\text{I.}^a \quad ddr - rd\varphi^2 + Fdt^2 = 0,$$
$$\text{II.}^a \quad rdd\varphi + 2drd\varphi - Pdt^2 = 0,$$

dalle quali si ricaveranno i valori di r, e φ.

155. Se si moltiplica l'equazione II. per r, il suo integrale è $r^2 d\varphi = dt \int Prdt$; e poichè $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$

è l'elemento dell'aja ACF, sarà l'aja $ACF = \frac{1}{2}\int dt \int Prdt$.

156. Supposta nulla la forza laterale P, l'integrale dell'equazione II.ª diventa $r^2 d\varphi = Cdt$, essendo C una costante; il che mostra la proporzionalità delle aje ai tempi, qualunque sia la forza sollecitante F.

157. Moltiplico l'equazione I.ª per dr, la II.ª per $rd\varphi$, e la loro somma dà $drddr + rdrd\varphi^2 + r^2 d\varphi dd\varphi = Pdt^2 rd\varphi - Fdt^2 dr$, il di cui integrale è $dr^2 + r^2 d\varphi^2 = 2dt^2 \int (Prd\varphi - Fdr)$. Essendo pertanto $\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}$ l'elemento dell'arco AC, se si chiama v la velocità del mobile in C, nascerà $v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = 2\int (Prd\varphi - Fdr)$.

158. L'equazione II. moltiplicata per $2r^3 d\varphi$ diventa $2r^4 d\varphi dd\varphi + 4r^3 drd\varphi^2 = 2Pr^3 dt^2 d\varphi$, che ha per integrale $r^4 d\varphi^2 = 2dt^2 \int Pr^3 d\varphi$. Ma pel §. precedente è $dr^2 = 2dt^2 \int (Prd\varphi - Fdr) - r^2 d\varphi^2$, ovvero $r^2 dr^2 = 2dt^2 (r^2 \int Prd\varphi - r^2 \int Fdr) - r^4 d\varphi^2$. Dunque sostituendo il valore di $r^4 d\varphi^2$, nasce $r^2 dr^2 = 2dt^2 (r^2 \int Prd\varphi - \int Pr^3 d\varphi - r^2 \int Fdr)$, ed essendo $\int Pr^3 d\varphi = r^2 \int Prd\varphi - 2\int rdr \int Prd\varphi$, risulta in fine $r^2 dr^2 = 2dt^2 (2\int rdr \int Prd\varphi - r^2 \int Fdr)$.

159. Poichè nell'ipotesi di $P = 0$ si ha (§. 156) $r^2 d\varphi = Cdt$, ovvero $rd\varphi = \frac{Cdt}{r}$, e (§. 157)

$dr^2 + r^2d^2\varphi = -2dt^2\int Fdr$, cioè $dr^2 = -r^2d\varphi^2 - 2dt^2\int Fdr$, fatte le sostituzioni nasce $dr^2 = -\frac{C^2dt^2}{r^2} - 2dt^2\int Fdr$, e conseguentemente

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{(-C^2 - 2r^2\int Fdr)}}, \text{ e}$$

$$d\varphi = \frac{Cdr}{r\sqrt{(-C^2 - 2r^2\int Fdr)}}.$$

160. Con tali formole si determina nell' Astronomia Teorica la longitudine, l' anomalia, e la distanza de' pianeti dal centro della forza attrattrice, che regola i loro moti.



ARTICOLO XIII.

Sulle Trajettorie in differenti piani, ossia a doppia curvatura.

I.

Nel moto libero.

161. Stabilite le tre *direttrici* (Fig. 28) CA, CD, CB normali l'una all'altra, sicchè le due CA, CD sieno nel piano della tavola, e CB sia perpendicolare a questo piano, suppongo, che il corpo si muova liberamente per la Curva EGS a doppia curvatura, e venga sollecitato da quante e quali si voglia potenze acceleratrici, e passato il tempo t sia pervenuto in G. Per avere le tre coordinate della Curva, si guidi da G la normale GY al piano ACD, e da Y la perpendicolare YX alla retta CD, e saranno $CX = x$, $XY = y$, $YG = z$ le coordinate della Curva rispettivamente parallele alle direttrici. Sia il viaggio fatto dal mobile nel tempo t $EG = s$, e perciò il suo elemento $Gg = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, e la velocità che ha il mobile in G sia $v = \frac{ds}{dt}$. 28.

Si riducano ora pel noto Teorema di Statica tutte le forze acceleranti a tre secondo le tre direzioni GP, GQ, GR fra se perpendicolari, e parallele alle direttrici, e si nomini P la forza secondo GP, Q la forza secondo GQ, R la forza secondo GR. Il principio delle forze acceleratrici somministra le tre quazioni

I.ª $ddx = Pdt^2$; II.ª $ddy = Qdt^2$; II.ª $ddz = Rdt^2$, dove dt si prende per costante. Dipendendo pertanto le forze P, Q, R dalle coordinate x, y, z, o anche dalla velocità $\frac{ds}{dt} = v$, gli artifizj analitici

applicati alle tre precedenti equazioni faranno conoscere la natura della Trajettoria, e il moto del corpo per essa.

Intanto siccome $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, e $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$, e però $vdv = \frac{dsdds}{dt^2} = \ldots$ $\frac{dxddx + dyddy + dzddz}{dt^2}$, la somma delle tre predette equazioni moltiplicate la prima per dx, la seconda per dy, la terza per dz, e divise per dt^2 darà $vdv = Pdx + Qdy + Rdz$, equazione, che serve a determinare l'accelerazione del corpo per la Curva.

Ad effetto poi di trovare la Curva, pongo $dy = pdx$, $dz = qdx$, donde nasce $ds = dx\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, e $v = \frac{dx}{dt}\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$. Inoltre $ddy = pddx + dpdx$, $ddz = qddx + dqdx$, e quindi $dpdx = ddy - pddx = Qdt^2 - Ppdt^2$,
$dqdx = ddz - qddx = Rdt^2 - Pqdt^2$.
Sicchè essendo $dt^2 = \frac{dx^2(1 + p^2 + q^2)}{v^2}$, la sostituzione di questo valore offre

$$dp = \frac{dx(1 + p^2 + q^2)}{v^2}(Q - Pp),$$

$$dq = \frac{dx(1 + p^2 + q^2)}{v^2}(R - Pq),$$

e queste due equazioni si riducono immantinente in queste altre

$$Qdx - Pdy = \frac{v^2 dp}{1 + p^2 + q^2},$$

$$Rdx - Pdz = \frac{v^2 dq}{1 + p^2 + q^2},$$

le quali sostituiti i valori di p, q, dp, dq si convertono nelle seguenti

$$Qdx - Pdy = \frac{v^2(dxddy - dyddx)}{ds^2},$$

$$Rdx - Pdz = \frac{v^2(dxddz - dzddx)}{ds^2};$$

e di quest'ultime divisa la prima per $dxddy - dyddx$,

la seconda per $dxddz - dzddx$, nasce

$$\frac{Qdx - Pdy}{dxddy - dyddx} = \frac{Rdx - Pdz}{dxddz - dzddx},$$

e moltiplicando in croce, indi dividendo per dx si giugne finalmente all'equazione

$$P(dzddy - dyddz) + Q(dxddz - dzddx) + R(dyddx - dxddy) = 0,$$

che fa conoscere la Trajettoria.

162. Per ritrovare la velocità del mobile in qualsivoglia punto della Trajettoria abbiamo l'equazione $vdv = Pdx + Qdy + Rdz$, ed è manifesto, che $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$ è il valore della forza tangenziale, che risulta dalla risoluzione delle tre forze sollecitanti P, Q, R.

163. Se delle due equazioni

$$Qdx - Pdy = \frac{v^2}{ds^2}(dxddy - dyddx),$$

$$Rdx - Pdz = \frac{v^2}{ds^2}(dxddz - dzddx)$$

si moltiplica la seconda per dy, la prima per dz, e si sottrae questa da quella, indi il residuo si divide per dx, risulta la terza equazione $Rdy - Qdz = \frac{v^2}{ds^2}(dyddz - dzddy)$. E quindi per determinare la Trajettoria bastano due delle tre seguenti equazioni

$$Qdx - Pdy = \frac{v^2}{ds^2}(dxddy - dyddx) = \frac{v^2}{ds^2}dx^2 d.\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$Pdz - Rdx = \frac{v^2}{ds^2}(dzddx - dxddz) = \frac{v^2}{ds^2}dz^2 d.\left(\frac{dx}{dz}\right),$$

$$Rdy - Qdz = \frac{v^2}{ds^2}(dyddz - dzddy) = \frac{v^2}{ds^2}dy^2 d.\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

delle quali due qualunque involgono la terza.

164. L'equazione finale del § 161. può anche rappresentarsi in questa forma

$$Pdz^2 d.\left(\frac{dy}{dz}\right) + Qdx^2 d.\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rdy^2 d.\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

165. Le tre forze P, Q, R, dalle quali il mobile viene sollecitato, si riducono ad una sola, la quale è manifestamente $= \surd(P^2 + Q^2 + R^2)$. Nominata questa F, è facile il vedere, che la sua direzione forma con GP un angolo, che ha per coseno $\frac{P}{F}$, con GQ un angolo, il di cui coseno è $\frac{Q}{F}$, e con GR un angolo, che ha il coseno $\frac{R}{F}$.

166. Se la direzione della forza F forma colla direzione Gg del moto del corpo un angolo $= \omega$, la forza sollecitante secondo Gg, cioè la forza tangenziale $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$ diventa $= F \cos. \omega$, dal che nasce $\cos. \omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Fds}$.

II.

Nel moto obbligato.

167. Facciasi ora l'ipotesi, che il corpo si muova in un tubo o canale a doppia curvatura, ma che non sia sollecitato da alcuna forza acceleratrice, e cerchisi il suo moto, e la pressione contro
28. il tubo. Sia dunque EGS (Fig. 28) la figura del tubo, e pongasi, che passato il tempo t il corpo sia giunto in G, ed abbia scorso lo spazio EG. Si riferisca pertanto il luogo G del corpo a tre direzioni fisse CD, CA, CB l'una all'altra perpendicolari, ed a queste sieno parallele le coordinate $CX = x$, $XY = y$, $YG = z$. Ora siccome il corpo è necessitato a seguire la direzione del tubo, questo agirà sul corpo con forze a ciò necessarie, le quali però dovendo esercitarsi in una direzione perpendicolare alla curvatura del tubo non potranno produrre verun cangiamento nella velocità del mobile, il di cui moto sarà conseguentemente uniforme. Ridotte queste forze alle tre direzioni GP, GQ, GR parallele ai tre assi delle coordinate, e

chiamata la prima P, la seconda Q, la terza R, e la velocità costante del corpo c, si fa palese, che per l'immutabilità della velocità nasce l'equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Inoltre nelle tre equazioni $ddx = Pdt^2$, $ddy = Qdt^2$, $ddz = Rdt^2$ sostituendo il valore di $dt = \frac{ds}{c}$, risultano le tre seguenti $c^2 ddx = Pds^2$, $c^2 ddy = Qds^2$, $c^2 ddz = Rds^2$, e quindi $ds^4(P^2 + Q^2 + R^2) = c^4(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)$, ovvero $\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)} = \frac{c^2 \sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}{ds^2} = F$, che è l'espressione della forza totale F, con cui il tubo agisce nel corpo, ed a questa forza è uguale e contraria la pressione del corpo contro le pareti del tubo.

La direzione poi di questa forza F, che è la risultante delle tre forze P, Q, R, forma colla retta GP un angolo, il di cui coseno è $= \frac{P}{F} = \frac{ddx}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$, colla retta GQ un angolo, che ha il coseno $= \frac{Q}{F} = \ldots \frac{ddy}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$, e colla GR un angolo, che ha per coseno $\frac{R}{F} = \frac{ddz}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$.

168. Chiamando r il raggio osculatore della curva del tubo in G, ed essendo F la forza normale, e c la velocità, ne verrà (§. 132) $r = \frac{c^2}{F}$; e siccome si è trovato ora $F = \ldots \frac{c^2 \sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}{ds^2}$, nascerà $r = \ldots$

$\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$. E poichè inoltre la posizione del raggio osculatore è la medesima che quella della forza normale F, formerà ancor esso colle rette GP, GQ, GR i medesimi angoli, che forma la direzione della forza nomale, e de' quali nel §. precedente abbiamo assegnato i coseni.

169. Se si volesse ora esaminare il moto d' un corpo non per una data linea, ma per una data superficie qualunque, basterebbe far attenzione, che la direzione dalla forza esercitata dalla superficie contro il corpo dee sempre essere perpendicolare alla superficie; sicchè dall'equazione proposta di questa ricavando la posizione della retta ad essa normale, cioè l'inclinazione di tal retta alle tre date GP, GQ, GR, ed eguagliando l' espressione di questa inclinazione con quella dell'inclinazione nel §. 167. assegnata della forza F all' una, o all' altra delle stesse tre rette, si trarrà quindi una nuova equazione fra le coordinate x, y, z, la quale combinata coll'equazione della superficie servirà a determinare la linea percosa dal corpo sulla detta superficie, donde potrà anche inferirsi, ciò che per se stesso è evidente, che una tal linea esser dee la più corta di tutte quelle, che vanno dall' uno all' altro de' medesimi estremi.

III.

Nel moto riferito ad un polo.

170. Non dee finalmente tralasciarsi il metodo di definire i moti fatti nelle Curve a doppia curvatura per mezzo degli angoli riferiti ad un punto fisso, metodo di grandissimo uso e vantaggio nella
29. Teorica Astronomia. Sia dunque (Fig. 29.) il corpo G sollecitato parte da una forza verso un punto

fisso C, parte da altre forze in qualunque direzione, e si proponga di determinare il suo moto relativamente al punto fisso C.

Si immagini un piano, che passi pel punto fisso C, e sia il piano della tavola, e si prenda in esso la direttrice CA, e supponendo, che nel tempo t il corpo sia arrivato al punto G della Trajettoria, si abbassi sul detto piano la normale GY, e da Y la normale YX all'asse CA, per modo che sieno $CX = x$, $XY = y$, $YG = z$ tre coordinate ortogonali della Curva. Si risolva la forza, che sollecita il corpo secondo GC verso il punto fisso C, nelle due secondo GY, e secondo YC; ed inoltre tutte le altre forze sollecitanti si risolvano in tre, cioè secondo GY, secondo YC, e secondo YE, essendo quest'ultima situata nel piano ACY, e perpendicolare a CY. Così tutte le forze sollecitatrici del corpo saranno ridotte a tre, una secondo YC, che si porrà $= H$, un'altra secondo YE, che si assumerà $= I$, ed una terza secondo GR, che farassi $= R$. Riducendo poi queste tre forze alle direzioni delle coordinate, è facile il vedere, che fatto l'angolo $ACY = \varphi$, ne risulterà (§. 161)

1.° Forza secondo $XC = H \cos.\varphi + I \operatorname{sen}.\varphi = -P$,
2.° Forza secondo $YX = H \operatorname{sen}.\varphi - I \cos.\varphi = -Q$,
3.° Forza secondo $GR = R$.

Gli effetti di queste forze vengono rappresentati dalle seguenti tre formole

1.ª $ddx = - dt^2 (H \cos.\varphi + I \operatorname{sen}.\varphi)$.
2.ª $ddy = - dt^2 (H \operatorname{sen}.\varphi - I \cos.\varphi)$.
3.ª $ddz = R dt^2$.

Moltiplico la prima per $\cos.\varphi$, la seconda per $\operatorname{sen}.\varphi$, e ne prendo la somma; poi dalla prima moltiplicata per $\operatorname{sen}.\varphi$ sottraggo la seconda moltiplicata per $\cos.\varphi$: il che somministra le due equazioni

$$ddx \cos.\varphi + ddy \operatorname{sen}.\varphi = - H dt^2 .$$
$$ddx \operatorname{sen}.\varphi - ddy \cos.\varphi = - I dt^2 .$$

Faccio ora $CY = u$, ed ho

$$x = u \cos.\varphi,$$
$$y = u \operatorname{sen}.\varphi;$$

e di qui ricavo

$$x \cos.\varphi + y \operatorname{sen}.\varphi = u,$$
$$x \operatorname{sen}.\varphi - y \cos.\varphi = 0.$$

Prendo di queste i differenziali, cioè

$$dx \cos.\varphi + dy \operatorname{sen}.\varphi - d\varphi(x \operatorname{sen}.\varphi - y \cos.\varphi) = du,$$
$$dx \operatorname{sen}.\varphi - dy \cos.\varphi + d\varphi(x \cos.\varphi + y \operatorname{sen}.\varphi) = 0,$$

vale a dire

$$dx \cos.\varphi + dy \operatorname{sen}.\varphi = du,$$
$$dx \operatorname{sen}.\varphi - dy \cos.\varphi = -u d\varphi.$$

Differenzio nuovamente queste ultime, e trovo

$$ddx \cos.\varphi + ddy \operatorname{sen}.\varphi - d\varphi(dx \operatorname{sen}.\varphi - dy \cos.\varphi) = ddu,$$

$$ddx \operatorname{sen}.\varphi - ddy \cos.\varphi + d\varphi(dx \cos.\varphi + dy \operatorname{sen}.\varphi) = -dud\varphi - udd\varphi,$$

e quindi ritraggo le due seguenti

$$ddx \cos.\varphi + ddy \operatorname{sen}.\varphi = ddu - ud\varphi^2,$$
$$ddx \operatorname{sen}.\varphi - ddy \cos.\varphi = -2dud\varphi - udd\varphi.$$

Sostituisco presentemente questi valori nelle due equazioni primitive, ed ottengo le due seguenti fondamentali

$$\text{I.}^a \quad ddu - ud\varphi^2 + Hdt^2 = 0,$$
$$\text{II.}^a \quad udd\varphi + 2dud\varphi - Idt^2 = 0.$$

Pongo oltracciò l'angolo di *latitudine* $GCY = \psi$, siccome l'angolo di *longitudine* $ACY = \varphi$. L'intersezione del piano che passa per C, e per l'elemento Gg della Trajettoria, ovvero per la direzione del moto in G col piano ACY, cioè *la linea de' nodi* sia CT, ed a questa si meni la perpendicolare YM, indi la GM, e verrà notata l'inclinazione di questi due piani dall'angolo $GMY = \rho$. Fatto poscia l'angolo $ACT = \omega$, e però $TCY = \varphi - \omega$, nasce $CM = u \cos.(\varphi - \omega)$, $YM = u \operatorname{sen}.(\varphi - \omega)$, $YG = u \operatorname{sen}.(\varphi - \omega) \operatorname{tang}.\rho = z = u \operatorname{tang}.\psi$; conseguentemente $\operatorname{tang}.\psi = \operatorname{sen}.(\varphi - \omega) \operatorname{tang}.\rho$.

Qui convien osservare, che per tutto il tempuscolo dt, che il corpo impiega a muoversi per l'elemento Gg della Curva rimane invariabile così la linea de' nodi CT, e quindi l'angolo ω, come pure l'inclinazione ρ dell' orbita al piano assunto: ond' è, che nel differenziare il valore di $tang.\psi$ si potranno avere per costanti ω, e ρ. Ma appartenendo il punto g anche all' orbita variata, come quello, che è principio dell' elemento susseguente dell' orbita, si rende chiaro, che il differenziale di $tang.\psi$ si troverà lo stesso anche con far variare ω, e ρ. Dal che si otterrà

$$d.tang.\psi = d\varphi\, cos.(\varphi - \omega)\, tang.\rho =$$

$$(d\varphi - d\omega)\, cos.(\varphi - \omega)\, tang.\rho + \frac{d\rho}{cos.\rho^2} sen.(\varphi - \omega);$$

e quindi

$$d\omega\, cos.(\varphi - \omega)\, tang.\rho = \frac{d\rho}{cos.\rho^2} sen.(\varphi - \omega),$$

e per fine

$$\frac{d\omega}{tang.(\varphi - \omega)} = \frac{d\rho}{sen.\rho\, cos.\rho} = d.log.tang.\rho.$$

Oltre a ciò essendo $z = u\, sen.(\varphi - \omega)\, tang.\rho$, se si sostituisce in dz il valore di $d\rho = \ldots$ $\frac{d\omega\, sen.\rho\, cos\, \rho\, cos.(\varphi - \omega)}{sen.(\varphi - \omega)}$, risulta

$$dz = du\, sen.(\varphi - \omega)\, tang.\rho + \ldots\ldots$$

$$u(d\varphi - d\omega)\, cos.(\varphi - \omega)\, tang.\rho + \ldots\ldots$$

$$ud\omega\, cos.(\varphi - \omega)\, tang.\rho = \left(du\, sen.(\varphi - \omega) + ud\varphi\, cos.(\varphi - \omega)\right) tang.\rho,$$

e questo valore nuovamente differenziato esibisce

$$ddz = \left(ddu\, sen.(\varphi - \omega) + du(2d\varphi - d\omega)\, cos.(\varphi - \omega) - ud\varphi(d\varphi - d\omega)\, sen.(\varphi - \omega) + udd\varphi\, cos.(\varphi - \omega)\right) tang.\rho$$

$$+ \left(du\, sen.(\varphi - \omega) + ud\varphi\, cos.(\varphi - \omega)\right) \times$$

$$\frac{d\omega\, tang.\rho\, cos.(\varphi-\omega)}{sen.(\varphi-\omega)} = \Big(ddu\, sen.(\varphi-\omega) + 2du d\varphi\, cos.(\varphi-\omega) + udd\varphi\, cos.(\varphi-\omega) - ud\varphi^2 sen.(\varphi-\omega) + \frac{ud\varphi d\omega}{sen.(\varphi-\omega)}\Big) tang.\rho\,.$$

Ma già si è trovato

$$ddu - ud\varphi^2 = -Hdt^2\,,$$

ed

$$udd\varphi + 2dud\varphi = Idt^2\,.$$

Dunque sostituendo questi valori, ne deriverà

$$ddz = \Big(Idt^2 cos.(\varphi-\omega) - Hdt^2 sen.(\varphi-\omega) + \frac{ud\varphi d\omega}{sen.(\varphi-\omega)}\Big) tang.\rho = Rdt^2\,,$$

e quindi

$$\frac{ud\varphi d\omega}{sen.(\varphi-\omega)} = dt^2\Big(H sen.(\varphi-\omega) - I cos.(\varphi-\omega) + R cot.\rho\Big),$$

ovvero

III.ª $$d\omega = \frac{dt^2 sen.(\varphi-\omega)}{ud\varphi}\Big(H sen.(\varphi-\omega) - I cos.(\varphi-\omega) + R cot.\rho\Big), \text{ e}$$

IV.ª $$d.log.tang.\rho = \frac{dt^2 cos.(\varphi-\omega)}{ud\varphi}\Big(H sen.(\varphi-\omega) - I cos.(\varphi-\omega) + R cot.\rho\Big).$$

Per tal modo abbiamo quattro equazioni, con cui determinare per un dato tempo qualunque t le quattro quantità u, φ, ω, ρ, delle quali equazioni le due prime sono differenziali di second'ordine, e le ultime semplicemente di primo ordine. In luogo della IV.ª a motivo di $d.log.tang.\rho = \frac{d\omega}{tang.(\varphi-\omega)}$, si può scrivere quest'altra

IV.ª $$d.tang.\rho = \frac{d\omega\, tang.\rho}{tang.(\varphi-\omega)}.$$

171. Ritrovati i valori delle quattro quantità u, φ, ω, ρ se ne dedurrà immantinente tanto il valore della *latitudine* $GCY = \psi$, quanto quello della distanza vera GC dalle due formole $tang.\,\psi = sen.(\varphi - \omega)\,tang.\,\rho$, $GC = \frac{u}{cos.\,\psi}$, dove u, ossia CY si nomina la *distanza accorciata*.

172. Dall' equazione III.ª nasce $\frac{d\omega}{sen.(\varphi - \omega)} = \frac{dt^2}{ud\varphi}\Big(H\,sen.(\varphi - \omega) - I\,cos.(\varphi - \omega) + R\,cot.\,\rho\Big)$; dal che si fa palese, che ogni qualvolta sarà $H\,sen.(\varphi - \omega) - I\,cos.(\varphi - \omega) + R\,cot.\,\rho = 0$, anche $\frac{d\omega}{sen.(\varphi - \omega)}$ dovrà essere $= 0$, vale a dire $d\omega = 0$; e conseguentemente per la IV.ª equazione $\frac{d\omega\,tang.\,\rho}{tang.(\varphi - \omega)} = \frac{d\rho}{cos.\,\rho^2} = 0$, ovvero $d\rho = 0$. Dunque nella predetta ipotesi di $H\,sen.(\varphi - \omega) - I\,cos.(\varphi - \omega) + R\,cot.\,\rho = 0$ si annulla così $d\omega$, come $d\rho$, che è quanto dire la linea de' nodi, e l' inclinazione dell'orbita non soggiacciono a verun cangiamento.

173. Si ripiglino le due equazioni

$$H\,cos.\,\varphi + I\,sen\,\varphi = -P$$
$$H\,sen.\,\varphi - I\,cos.\,\varphi = -Q.$$

Si moltiplichi la prima per $sen.\,\omega$, e si sottragga dalla seconda moltiplicata per $cos.\,\omega$; il che darà $P\,sen.\,\omega - Q\,cos.\,\omega = H\,sen.\,\varphi\,cos.\,\omega - H\,cos.\,\varphi\,sen.\,\omega - I\,sen\,\varphi\,sen.\,\omega - I\,cos.\,\varphi\,cos.\,\omega = H\,sen.(\varphi - \omega) - I\,cos.(\varphi - \omega)$. Laonde introducendo le forze primitive P, Q, R parallele ai tre assi delle coordinate si avrà $H\,sen.(\varphi - \omega) - I\,cos.(\varphi - \omega) + R\,cot.\,\rho = P\,sen.\,\omega - Q\,cos.\,\omega + R\,cot.\,\rho$, che è l' espressione della forza, la quale produce le variazioni momentanee $d\omega$, $d\rho$, cioè a dire tende ad alterare il luogo della *linea de' nodi*, e *l' inclinazione dell' orbita*. Da una tal espressione della momentanea variazione prodotta nel sito della linea de' nodi, e nell' inclina

zione dell' orbita l' Astronomia Teorica ne ha tratto un insigne vantaggio, e il famoso Mayer ne ha ricavate le sue immortali *Tavole della Luna*.



ARTICOLO XIV.

Sul vero concetto della Forza Centripeta, Centrifuga, Procentrifuga, e Normale; *e del moto libero ed obbligato nelle Curve; e sulla pressione che in esse ne risulta.*

174. Nel leggere le Opere di alcuni de' più acclamati moderni Scrittori di Meccanica, Astronomia, ec. s' incontrano tanti equivoci, ambiguità, ed anche contraddizioni nello stabilire le giuste idee, e le precise nozioni della *Forza Centripeta*, della *Forza Centrifuga*, e della *Forza Normale*, che sarebbe una meraviglia, se un giovane Geometra anche de' più attenti e ingegnosi trovasse da se stesso la via di uscire da tal laberinto, e giugnesse a formarsi un' idea adequata e distinta del soggetto proposto. A scanso pertanto d' ogni equivoco e confusione, ecco in breve la maniera come io concepisco la cosa. Due sono gli stati, in cui può trovarsi un punto mobile in ordine al suo moto, cioè 1.° in un moto *libero*; 2.° in un moto *obbligato*, o non *libero*.

I.

Nel moto libero.

175. Nel moto *libero* d' un corpo per una Curva in virtù d' una forza centrale sollecitante il corpo verso un punto fisso situato nel piano della Curva, si suole da molti Geometri (fra gli altri Boscovich nelle note a Stay) stabilire, che la *forza centripeta* è sempre uguale alla *centrifuga*, come

l' azione alla reazione, e che è un errore grossolano il credere l' una maggiore o minore dell' altra, non essendovi tra esse altra differenza che nella direzione, la quale è sempre opposta.

Ora ciò è verissimo, se per *forza centrifuga* s' intende quella, che farebbe descrivere la lineetta, per cui il mobile diventando libero si allontanerebbe in un istante dall' estremità dell' archetto, che esso attualmente descrive in quell' istante, la qual lineetta esprimendo altresì l' accostamento del mobile all' estremità di detto archetto in virtù della forza *centripeta* agente in quell' istante misura l' effetto della forza *centripeta*, e conseguentemente in questo supposto le due forze *centrifuga*, e *centripeta* venendo rappresentate dalla medesima linea presa in direzioni opposte debbono essere uguali, e contrarie. Così se il punto mobile descrive la Trajettoria ABG (Fig. 30) in virtù d' una forza che lo 30.
sollecita di continuo verso il punto F, e se giunto in B diventasse libero, e percorresse in un istante colla velocità, che trovasi avere in B, la tangente BE, laddove essendo sollecitato dalla forza percorre in quel medesimo istante l' archetto BG; egli è certo, che la lineetta $EG = BN$ mostra l' effetto della forza *centripeta*, e che la stessa linea in direzione opposta cioè GE rappresenta altresì l' effetto d' un' altra forza *passiva*, la quale risulta dalla forza tangenziale *attiva* BE, per cui il mobile giunto in E si sarebbe allontanato dall' estremo G dell' archetto BG pel tratto GE; e questa forza espressa da GE chiamasi da molti *centrifuga*, ed è sempre uguale ed opposta alla *centripeta*.

176. Condotti i due raggi osculatori BC, GC della curva infinitamente vicini, e la GM perpendicolare alla tangente BE, egli è evidente, che si può supporre il mobile nel principio dell' istante; durante il quale descrive BG, come animato dalle

due forze, *BM tangenziale*, ed *MG*, ovvero *BO normale*. Ora questa forza *normale MG* presa nella direzione opposta *GM* è quella, che da alcuni altri si chiama *centrifuga*, come quella, per cui si scosta il mobile dal centro *C* del circolo osculatore della curva nel venire da *B* in *G*, si scosta, dico, per l'intervallo *GM*. Ed è poi manifesto, che questa forza *GM*, che noi diremo *procentrifuga*, è sempre minore della *centrifuga GE*, alla quale non diventa uguale se non nel solo caso che il raggio vettore della curva, ossia la direzione della forza centrale riesca perpendicolare alla curva.

Quindi si rieavano i seguenti Teoremi.

1.° *La forza procentrifuga non è altro che la forza detta normale, ma presa in direzione opposta.*

2.° *La forza procentrifuga è sempre minore della centrifuga, salvo il caso che la direzione della forza centrale, ossia il raggio vettore della curva diventi perpendicolare ad essa, nel qual caso le due forze procentrifuga, e centrifuga divengono eguali.*

3.° *La forza centrifuga sta alla procentrifuga come sta il seno tutto al seno dell'angolo fatto dal raggio vettore, o dalla direzione della forza centrale, e dalla curva, ovvero al coseno dell'angolo formato dai due raggi, vettore, ed osculatore.*

4.° *Nel circolo la forza centrifuga è la stessa che la procentrifuga.*

5.° *La forza centripeta, o anche centrifuga del mobile in un punto qualunque della sua orbita sta alla forza centripeta, o anche centrifuga, che esso avrebbe, se in quello stesso luogo si movesse equabilmente nel cerchio osculatore della Curva colla velocità competente a quel punto, come sta il seno tutto al seno dell'angolo fatto dal raggio vettore colla tangente della curva.*

6.° *Chiamato* r *il raggio osculatore in* B, N *la forza procentrifuga, o normale,* v *la velocità del mobile in* B, *e* φ *l'angolo* FBQ, *risulta la forza centrifuga*

$= \frac{N}{sen.\varphi} = \frac{v^2}{r\,sen.\varphi} = \frac{2gh}{r\,sen.\varphi}$, *essendo* g *la gravità terrestre*, *ed* h *l'altezza dovuta alla velocità* v.

177. Il D'Alembert negli articoli per altro belli ed interessante dell'Enciclopedia riguardanti le Forze Centrali, quali sono *Centrifuge*, *Centirpete*, ec. parla ancora egli con poca esattezza, e contribuisce non poco ad imbrogliare le idee di chi lo legge, come per esempio allorchè quivi stabilisce che la forza *centrifuga* non meno che la *centripeta*, per lui sempre uguali, sono rappresentate dalla linea perpendicolare alla tangente della curva nel punto dove agisce la forza sul mobile, e sono ad essa lineetta proporzionali: il che non è vero se non in uno dei due casi, cioè 1.° quando si parla della sola forza *procentrifuga*, o della sola forza *normale*, ma non della *centripeta*; 2.° quando si parla anco della *centripeta*, purchè però questa abbia una direzione perpendicolare alla curva.

II.

Nel moto obbligato, o non libero.

178. Se il punto mobile a cagione di qualche esterno impedimento non può andare per quella strada, per la quale in virtù delle forze, ond'è animato, naturalmente andrebbe, il suo moto si dice *obbligato*, *o non libero*. Supposto, che il punto sia costretto ad andare per la linea o canale curvo *ABE* (Fig. 31), e che si trovi in *B*, sicchè debba nell' 31.
istante appresso descrivere l'elemento *BD*; egli è manifesto, che se in vece di essere *obbligato*, un tal moto fosse *libero*, qualunque esser potesse la sua origine o forza motrice, vi sarebbe sempre in esso punto in *B* una forza *normale* $BP = CD = \frac{v^2}{r}$

$= \frac{2gh}{r}$, e questa uguale e contraria alla *procentrifuga* $PB = DC$. Ma essendo *obbligato* il moto, che qui contempliamo, ed il punto costretto ad andare per un cammino prescritto, cioè pel canale anzidetto, non è necessaria la prefata forza *normale*, ma la sua eguale ed opposta, cioè la *procentrifuga* spiega la sua energia contro le pareti del canale, premendo perpendicolarmente contro la via curvilinea segnata dal punto in movimento.

179. Siccome nell'espressione $\frac{2gh}{r}$ della forza *procentrifuga*, o della pressione contro il canale non si è considerata la massa del punto premente, e però tal forza è puramente acceleratrice, come quella che sollecita un punto solo qualunque di tutta la massa; quindi è, che se la massa intera del punto mobile sarà $= M$, la forza motrice della pressione contro il canale sarà $= \frac{2ghM}{r}$, cioè tanta, quanta è quella d'un grave terrestre premente verticalmente contro B, ed avente un peso $= \frac{2ghM}{r}$. Conseguentemente la fermezza del canale in B dev'esser tale da poter quivi sostenere verticalmente il detto peso, il qual peso è uguale al peso gM del punto mobile, o maggiore, o minore di esso secondo che $2h$ è uguale, maggiore, o minore di r.

180. Se il punto mobile viene posto in moto per un impulso, e costreto ad andare per un canale ABE, senza che alcun'altra forza o impressa, o insita agisca in esso punto, egli preme costantemente il canale colla forza preallegata. Così, se il canale ABE è situato sopra una tavola orizzontale, ed il punto mobile ed *inerte*, oppure anche comunque *grave* (giacchè in tal situazione la gravità non agisce) occupa in A la cavità del canale, e riceve

un impulso secondo la tangente *NA* del canale nel punto *A*, dal qual impulso gli viene comunicata la velocità *c* dovuta all' altezza *a*, senza essere sollecitato da alcuna forza acceleratrice; non v' ha dubbio, che esso prosiegue a muoversi lungo il canale curvilineo sempre colla stessa velocità *c*, e *preme* contro il canale con una forza *procentrifuga* $= \frac{c^2 M}{r} = \frac{2gaM}{r}$ variabile in ragione inversa del raggio osculatore di quel punto del canale, dove il mobile si ritrova.

181. La permanenza della primitiva velocità *c* nel mobile, ovvero l' uniformità del suo moto si dimostra così: Giunto il mobile dovunque in *B*, colla velocità che ha quivi descriverebbe se fosse libero nel tempuscolo *dt* la lineetta *BC* prolungamento dell' elemento *SB* del canale; e però risoluta la velocità $\frac{BC}{dt}$ in due una $\frac{BD}{dt}$ a seconda del canale, l' altra $\frac{DC}{dt}$ perpendicolare ad esso, rimarrà al mobile la sola $\frac{BD}{dt}$ venendo l' altra $\frac{DC}{dt}$ distrutta dalla resistenza del canale. Quindi è, che la perdita della velocità fatta dal mobile nell' istante *dt* sarà $\frac{1}{dt}\left(BC - BD\right) = \frac{1}{dt}\left(BC - \sqrt{BC^2 - DC^2}\right) = \frac{1}{dt}\left(BC - BC + \frac{DC^2}{2BC} + \text{ec.}\right) = \frac{DC^2}{2dt.BC}$, che è una quantità infinitesima di second' ordine per essere *BC* di primo, e *DC* di secondo a motivo dell' angolo infinitesimo *DBC*. Si conserva dunque nel moto pel canale sempre la stessa primitiva velocità *c*. Siccome poi il raggio osculatore $r = \frac{BD^2}{DC} = \frac{BC^2}{DC}$, e quindi $DC^2 = \frac{BC^4}{r^2}$, ne deriva la per-

dita della velocità $\frac{DC^2}{2dt.BC} = \frac{BC^3}{2dt.r^2} = \frac{BC}{dt} \cdot \frac{BC^2}{2r^2} = \frac{cds^2}{2r^2}$, fatto cioè $\frac{BC}{dt} = c$, e $BC = ds$. Questa perdita è sempre un infinitesimo di second' ordine fintantochè il raggio osculatore r rimane finito; ma se questo diviene infinitesimo, può esser finita la quantità $\frac{cds^2}{2r^2}$, ed allora il mobile soffre repentinamente una perdita finita della sua velocità. Ciò può soltanto accadere nelle *cuspidi* della linea curva, poichè andando il mobile ad urtare direttamente contro una di siffatte cuspidi dee perdere tutta la sua velocità. Che se $\frac{cds^2}{2r^2}$ è infinitesimo di prim' ordine, tale è pure la perdita della velocità, e però finita in un tempo finito. Ma siccome que' luoghi della curva, ne' quali il raggio della curvatura è infinitesimo, sono rari, e lontani l'uno dall'altro, così il moto del corpo negli archi frapposti a siffatti punti seguita ad essere uniforme.

182. Il Sig. Kästner nella sua Meccanica pag. 169. dall'esempio precedente del mobile, che scorre pel canale orizzontale, ne deduce, che in questo caso nasce la *pressione*, ossia la forza dal moto, e che però non può decidersi, se le forze sieno la cagione del moto, o piuttosto i moti la cagione delle forze.

183. Se l'impulso impresso al mobile nel canale non fosse diretto secondo la tangente NA, si risolverebbe in due parti, una perpendicolare al canale, l'altra a seconda del canale istesso, quella distrutta dalla fermezza del canale, questa intatta e spingente il mobile con pieno effetto, ed inprimente ad esso una velocità primitiva inalterabile.

184. Che se il mobile venisse anche sollecitato lungo il canale da quante e quali forze *acceleratrici*

si voglia, una delle quali sarebbe per es. la gravità qualora il mobile oltre ad essere inerte si concepisse anche grave, e discendesse pel canale curvilineo verticalmente situato; allora dovranno ridursi tutte queste forze acceleratrici a due, una in direzione della tangente del canale, l'altra ad esso perpendicolare, quella alteratrice della velocità del mobile lungo il canale, questa della pressione contro il canale. Sicchè chiamando N questa forza normale nata dalla risoluzione delle forze acceleratrici, ed essendo $\frac{2gh}{r}$ la pressione contro il canale prodotta dalla forza *procentrifuga*, risulterà la pressione intera $= \frac{2gh}{r} \pm N$, col segno superiore quando la forza normale N riesca cospirante colla forza *procentrifuga*, coll' inferiore quando N sia in direzione opposta alla *procentrifuga*. E se nel caso che la forza normale N risulti opposta alla *procentrifuga*, sia inoltre quella, in ordine alla grandezza, eguale a questa, cioè $N = \frac{2gh}{r}$, allora essendo $\frac{2gh}{r} - N = 0$, il mobile non preme più contro la via, cui egli trascorre, e conseguentemente il suo moto diviene *libero*.

Per maggior rischiaramento di quanto si è detto, credo non inutile di aggiugnere le seguenti considerazioni.

185. Supporremo 1.° , che il mobile sia un punto fisico d'un volume infinitamente piccolo: 2.° che la linea, sulla quale si muove, non gli permetta di allontanarsi da nessun verso, come fareb. be per esempio un canale, il cui diametro fosse uguale a quello del corpo: 3.° che dentro questo canale il corpo possa muoversi liberamente senza provare il minimo soffregamento dalle sue pareti.

Un tal canale non potrà dunque distruggere se non que' moti, che sono ad esso perpendicolari, e conseguentemente la resistenza proveniente da questa causa si eserciterà tutta secondo la perpendicolare alla linea descritta, per modo che non ne risulterà alcuna forza tangenziale per alterare la velocità del mobile. Dunque se il corpo si muove in virtù d'un impulso primitivo, e se il suo moto non è turbato da alcuna forza acceleratrice, qualunque sia la curva, sulla quale egli sarà costretto a muoversi, avrà esso dappertutto la medesima velocità, e descriverà in conseguenza archi uguali di questa curva in tempi uguali.

186. Ora un mobile non può essere obbligato e necessitato nella sua direzione senza che ne risulti una pressione continua sulla linea del suo moto, ovvero, ciò che è lo stesso, senza che il filo della evoluta di detta linea non pruovi una certa tensione. Dunque se si applicasse in direzione contraria una forza eguale a questa pressione, il mobile descriverebbe bensì la medesima curva, ma allora il suo moto sarebbe libero.

Suppongasi, che il corpo non si muova sulla cur-
32. va AM (Fig. 32), la cui evoluta è BNC, se non se in virtù di qualche impulso primitivo senza essere turbato da veruna potenza; e chiamisi F la forza di pressione, che esso esercita sulla curva AM secondo la perpendicolare NM. Se questa forza considerata come forza acceleratrice fosse impressa al mobile nella direzione opposta MN, la trajettoria AM sarebbe descritta con un moto libero. Ora F essendo la forza normale, ha per valore il quadrato della velocità vv diviso pel raggio osculatore MN (§ 131, e 151). Questa adunque è altresì il valore della pressione sopra la curva, ovvero della tensione del filo, chiamata da noi *forza procentrifuga*. Questa denominazione deriva da ciò, che il mobile

tendendo per la sua inerzia a muoversi uniformemente, ed in linea retta non può essere costretto a descrivere una linea curva senza fare uno sforzo continuo per isfuggire per la tangente, ed allontanarsi dal centro del suo moto.

187. La *forza procentrifuga* è dunque uguale al quadrato della velocità diviso pel raggio osculatore. Ella sta alla forza della gravità come l'altezza dovuta alla velocità del mobile sta alla metà del raggio osculatore. Non bisogna però credere, che la forza centrifuga dipenda dalla gravità, imperciocchè il mobile premerebbe la linea, sulla quale si muove, quand'anco la gravità non esistesse.

188. Quali che sieno altronde le forze, che sollecitano un corpo nella sua trajettoria, si potranno ridurre a due, una tangenziale T, l'altra normale N (129. e seg.). La prima altererà la velocità del mobile, e si avrà $vdv = Tds$; la seconda produrrà una nuova pressione sulla curva descritta, ed allorchè ella agirà nella stessa direzione che la forza procentrifuga $\frac{vv}{R}$, la pressione totale sarà $\frac{vv}{R} + N$: ma se ella agisce in direzione contraria, la pressione non sarà più espressa se non da $\frac{vv}{R} - N$.

In quest'ultimo caso la pressione diverrà nulla allorchè N sarà uguale a $\frac{vv}{R}$, e conseguentemente il mobile descriverà *liberamente* la linea data. E questa è appunto l'equazione, che si ha pe' moti liberi.

189. Per mezzo della formola $vdv = Tds$, e dell'equazione nota della curva si troverà la velocità del mobile in un punto qualunque. Il tempo si de

terminerà integrando $\frac{ds}{v}$; e la pressione sopra la trajettoria sarà espressa da $\frac{vv}{R} \pm N$. Ma quest' ultimo elemento non è necessario per conoscere il moto.

33. 190. Sia BM (Fig. 33) la linea data, AP il suo asse, X, ed Y le due forze acceleratrici dirette, l' una secondo MN parallelamente all' asse AP, l' altra secondo PM parallelamente alle ordinate. Sia P la pressione totale sulla curva secondo la perpendicolare OM. Se si applica questa forza in verso contrario secondo MO, il moto diverrà libero. Risolvendo adunque la forza P secondo MO in due, la prima nella direzione di MN, la seconda nella direzione di MQ, si avrà $\frac{Pdy}{ds}$ per l' una, e $\frac{Pdx}{ds}$ per l' altra. Donde si dedurrà

$$\left(X+\frac{Pdy}{ds}\right)dt = d.\left(\frac{dx}{dt}\right);\ \left(Y-\frac{Pdx}{ds}\right)dt = d.\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Sostituendo $\frac{ds}{v}$ in vece di dt, si avrà

$$Xds + Pdy = v\,d.\left(\frac{vdx}{ds}\right) = vv\,d.\left(\frac{dx}{ds}\right) + vdv\,.\,\frac{dx}{ds};$$

$$Yds - Pdx = vv\,d.\left(\frac{dy}{ds}\right) + vdv \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Moltiplicando la prima di queste due equazioni per dx, e la seconda per dy, ed aggiungendo insieme i prodotti, si trova $(Xdx + Ydy)ds = \ldots$

$$vvds.\left[\frac{dx}{ds}d.\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}d.\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] + vdvds;$$

e siccome $\frac{dx}{ds}d.\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}d.\left(\frac{dy}{ds}\right) = \ldots$

$$\frac{dx}{ds}\left(\frac{dsddx - dxdds}{ds^2}\right) + \frac{dy}{ds}\left(\frac{dsddy - dydds}{ds^2}\right) =$$

$$\frac{dsdxddx + dsdyddy - dx^2dds - dy^2dds}{ds^3} = \ldots$$

$$\frac{dxddx + dyddy - dsdds}{ds^2} = \frac{1}{2ds^2}\cdot d.(dx^2 + dy^2 - ds^2)$$

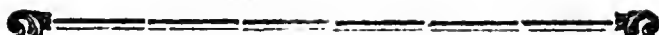
$= 0$; perciò nasce l'equazione $Xdx + Ydy = vdv$, che equivale a $vdv = Tds$. Parimente se dopo aver moltiplicata la prima delle due dette equazioni per dy, la seconda per dx, si sottrae questa da quella, si avrà $(Xdy - Ydx)ds + Pds^2 = \ldots$ $v^2 ds\left[\frac{dy}{ds}d.\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}d.\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]$. Essendo poi $\frac{dy}{ds}d.\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}d.\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{dy}{ds}\left(\frac{dsddx - dxdds}{ds^2}\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dsddy - dydds}{ds^2}\right) = \frac{dyddx - dxddy}{ds^2} = -\frac{dx^2}{ds^2}d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$, nascesà

$$(Xdy - Ydx)ds + Pds^2 = -\frac{v^2dx^2}{ds}d.\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Ora il raggio osculatore $R = \frac{ds^3}{-dx^2 d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Dunque

$P = \frac{v^2}{R} + \frac{Ydx - Xdy}{ds}$; equazione la quale fa vedere, che quand' anche non vi fosse alcuna potenza acceleratrice, la pressione sopra la curva non lascierebbe di essere espressa da $\frac{v^2}{R}$. Ella fa vedere altresì, che nel caso che vi sieno siffatte potenze, la pressione sopra la curva a cagione della forza centrifuga è aumentata della forza normale (142), allorchè la sua direzione è la medesima che quella della forza centrifuga, ed è diminuita di questa stessa forza allorchè la sua direzione è opposta.





ARTICOLO XV.

Sopra le Forze Centrali nelle Curve.

Teorema I.

34. 191. *Nella Curva* AQ (Fig. 34.) *guidati i due raggi vettori infinitamente vicini* FA, FO, *e dagli estremi dell'archetto le tangenti* AC, OG, *e ad esse le normali* FC, FG *dal fuoco; indi cogl'intervalli del raggio vettore, e della normale descritti gli archetti circolari* BO, GH, *dico che l'archetto circolare* BO *fra i due raggi vettori sta all'archetto* GH *fra le normali come la differenza* AB *de' raggi vettori alla differenza* NC *delle normali.*

Dim. La similitudine de' triangoli ABO, AFC dà $AB : BO :: AC : CF :: AC : FG$; e la similitudine de' triangoli ANC, FNG dà $AC : FG :: NC : NG :: NC : GH$. Dunque $AB : BO :: NC : GH$, e alternando $BO : GH :: AB : NC$. Il che era ec.

Teorema II.

192. Il Maclaurin nel suo Tratt. delle Fluss. tom. II. §. 874. dice, che *se in una Trajettoria descritta da un mobile in virtù d'una forza centrale diretta ad un punto, ossia centro dentro la Curva si chiama* r *il raggio vettore,* p *il perpendicolo abbassato dal centro della forza sulla tangente della Trajettoria all'estremità di* r, *cioè al luogo del mobile; sta la velocità del mobile per la Trajettoria nel luogo dov'egli si trova, alla velocità, colla quale sarebbe dal mobile*

descritto un cerchio intorno allo stesso centro della forza, e alla stessa distanza r, e colla medesima forza centripeta in quel luogo, come sta $\sqrt{\frac{dr}{r}}$ *a* $\sqrt{\frac{dp}{p}}$.

DIM. Per dimostrare questo interessante Teorema rifletto avere io dimostrato nel Problema delle Forze Centrali inserito nelle Note alla Meccanica di Bossut tom. II. pag. 48., che nominata φ la forza centrale, v la velocità del mobile nel punto della Curva, sul quale egli si trova, si ha $v^2 = \frac{\varphi p dr}{dp}$.
È poi altronde notissimo, che per descrivere un cerchio di raggio r colla stessa forza centripeta φ il mobile dee rivolgersi in esso colla velocità, che acquisterebbe cadendo verso il centro per l'altezza della metà del raggio, e incalzato dalla forza φ *costante*; onde è, che detta x l'altezza indeterminata, da cui cade questo mobile, ed in fine della quale si trova aver acquistata la velocità c, nasce $\varphi dx = cdc$, ed integrando $2\varphi x = c^2$ senza costante, perchè si suppone, che il mobile caschi dalla quiete, e che però si annullino insieme x, e c. Perlocchè posto $x = \frac{1}{2}r$, sarà $c^2 = \varphi r$, valore del quadrato della velocità del mobile pel cerhio. Dunque $v^2 : c^2 :: \frac{\varphi p dr}{dp} : \varphi r :: \frac{dr}{r} : \frac{dp}{p}$, e finalmente $v : c :: \sqrt{\frac{dr}{r}} : \sqrt{\frac{dp}{p}}$. Il che era ec.

193. COR. I. Sono adunque le velocità del mobile nella Trajettoria, e nel cerchio descritto alla stessa distanza in virtù della stessa forza centrale in ragione sudduplicata de' differenziali logaritmici del raggio vettore e della normale sulla tangente della Curva.

194. COR. II. Io ho dimostrato nel Problema mentrovato pag 49. dell'Opera citata, che il raggio osculatore R di qualunque curva è sempre uguale

al raggio vettore moltiplicato per la sua differenza, e diviso per la differenza della normale, cioè $R = \frac{rdr}{dp}$. Dunque essendo $dr = \frac{Rdp}{r}$, sarà $v^2 : c^2 :: \frac{Rdp}{r^2} : \frac{dp}{p} :: Rp : r^2$, cioè la velocità nella Trajettoria, e nel cerchio alla stessa distanza sono in ragione sudduplicata del rettangolo del raggio osculatore nella normale al quadrato del raggio vettore.

Teorema III.

195. *In ogni Trajettoria descritta in virtù d'una qualunque forza centrale tendente ad un punto, la velocità del mobile in qualsivoglia luogo della Trajettoria sta alla velocità del corpo che intorno al centro della forza descrive un cerchio alla stessa distanza colla forza medesima, in ragione sudduplicata della velocità* angolare *del raggio vettore intorno al centro alla velocità* angolare *della normale dal centro sulla tangente della curva intorno allo stesso centro.*

Dim. La velocità angolare del raggio vettore
34. *FA* (Fig. 34) intorno al centro, o fuoco *F* è l'angolo infinitesimo *AFO*, per cui si muove il raggio in un dato istante, oppure l'archetto circolare *BO* diviso pel raggio *FO*, o *FA*. Similmente la velocità angolare della normale *FC* intorno ad *F* è l'angolo *CFG* da essa percorsa nello stesso dato istante, ovvero l'archetto circolare *GH* diviso pel semidiametro *FG*, o *FC*. Dunque la velocità angolare di *FA* intorno ad *F* sta alla velocità angolare di *FC* intorno ad *F* come $\frac{BO}{FA} : \frac{GH}{FC}$. Ma si è dimostrato, Teorema I., che $BO : GH :: AB : NC$. Dunque la velocità angolare di *FA* intorno ad *F* sta alla velocità angolare di *FC* intorno ad *F* ::

$\frac{AB}{FA} : \frac{NC}{FC} :: \frac{dr}{r} : \frac{dp}{p}$. E poichè per Teorema II. la velocità del mobile nella Trajettoria sta alla velocità nel cerchio alla stessa distanza :: $\sqrt{\frac{dr}{r}} : \sqrt{\frac{dp}{p}}$, quindi ne viene, che la velocità nella Trajettoria sta alla velocità nel cerchio in eguale distanza in ragione sudduplicata della velocità angolare del raggio vettore intorno al centro della forza alla velocità angolare della normale intorno allo stesso centro. Il che era ec.

196. Scol. Questo Teorema si dimostra altrimenti e più brevemente così: $ang. AFO : ang. CFG (= CAG) :: \frac{BO}{FA} : \frac{CN}{CA}$. Ma i triangoli simili ABO, FAC danno $CA : CF :: BA : BO = \frac{CF.BA}{CA}$. Dunque $ang. AFO : ang. CFG :: \frac{CF.BA}{FA.CA} : \frac{CN}{CA} :: \frac{BA}{FA} : \frac{CN}{CF}$. Dunque ec.

Teorema IV.

197. *In qualunque Curva* ABS (Fig. 35) *preso dovunque un punto fisso, o fuoco, o polo* F *e guidato il raggio vettore* FB, *e sulla tangente* BP *la normale* FP, *dico che la velocità angolare del raggio vettore* FB *intorno al fuoco* F *sta alla velocità angolare della normale* FP *intorno allo stesso punto* F *come sta la corda* BQ, *che passa per* F, *del cerchio osculatore* BROQ *della curva in* B *al doppio di* BF. 35.

Dim. Al punto b infinitamente vicino a B si meni l'altra tangente bp, e ad essa la normale Fp, e l'altro raggio vettore Fb, e fatto centro in F alla distanza Fb si descriva l'archetto circolare bm:

e la velocità angolare di FB intorno ad F sarà espressa dall'angolo infinitesimo BFb, ovvero da $\frac{bm}{FB}$, siccome parimente la velocità angolare di FP intorno ad F verrà rappresentata dall'angolo PFp, oppure dal suo eguale BCb (a motivo de' raggi osculatori BC, bC rispettivamente perpendicolari alle tangenti BP, bp), cioè a dire da $\frac{Bb}{BC}$. Ma per li triangoli simili Bbm, BQO abbiamo $bm : Bb :: BQ : BO$; dunque $\frac{bm}{FB} : \frac{Bb}{BC} :: \frac{BQ}{FB} : \frac{BO}{BC} :: \frac{BQ}{FB} : 2 :: BQ : 2FB$, e conseguentemente la velocità angolare di FB intorno ad F sta alla velocità angolare di FP intorno ad F come $BQ : 2FB$. Il che era ec.

Teorema V.

198. *La velocità del mobile in un dato punto* B *di qualunque Trajettoria* BS *descritta in virtù d'una forza centrale tendente ad un punto* F *sta alla velocità del mobile in un cerchio descritto alla stessa distanza dal centro* F *della forza, e colla forza medesima agente in tal distanza, sta dico nella ragione sudduplicata della corda* BQ *del cerchio osculatore* BROQ *della Trajettoria in* B, *la qual corda passa pel centro della forza, al doppio raggio vettore* FB.

Dim 1.ª La velocità nella Trajettoria sta alla velocità nel cerchio descritto col raggio FB in ragione sudduplicata della velocità angolare del raggio vettore FB intorno ad F alla velocità angolare della normale FP intorno ad F, pel Teorema III. Ma pel Teorema precedente queste due velocità stanno come la corda BQ del cerchio osculatore a $2FB$. Dunque la velocità nella Trajettoria sta alla

velocità nel cerchio avente per semidiametro il raggio vettore come $\sqrt{BQ} : \sqrt{2FB}$. Il che era ec.

199. Dim. 2.ª Chiamata v la velocità nella Trajettoria in B, c la velocità nel cerchio, r il raggio vettore FB, R il raggio osculatore CB, C la corda BQ, p la normale FP sulla tangente, abbiamo dimostrato nel Cor. II. del Teor. II., che $v^2 : c^2 :: Rp : r^2$. Ma i triangoli simili BFP, BQO danno $BF : FP :: BO : BQ$, cioè $r : p :: 2R : C$, e quindi $Rp = \frac{Cr}{2}$. Dunque $v^2 : c^2 :: \frac{Cr}{2} : r^2 :: C : 2r$. Il che era ec.

Teorema VI.

200. *In qualunque Trajettoria descritta in vigore d'una forza qualunque centrale tendente ad un punto la velocità del mobile allora diventa uguale alla velocità pel cerchio descritto alla stessa distanza dal centro della forza quando l'angolo fatto dal raggio vettore colla curva, o colla sua tangente diventa un* minimo.

Dim. 1.ª Sia (Fig. 36) BG tangente della Trajettoria in B, ed FG la normale dal fuoco, o centro della forza sulla tangente; indi prolungato l'archetto infinitesimo Bb in g, sia bg tangente della curva in b, ed Fg normale ad essa. Il differenziale dell'angolo FBG fatto dal raggio vettore colla tangente è $= Fbg - FBG = FBb + BFb - FBG = BFb - GBg$. Dunque quando FBG sarà un minimo, sarà anco $BFb - GBg = 0$, oppure $BFb = GBg$, ovvero (descritto l'archetto circolare bm) $\frac{bm}{FB} = \frac{Gn}{BG} =$ (per gli angoli uguali GBg, GFg) $\frac{ng}{FG}$. Ora si è dimostrato Teor. I, che $Bm : Gn :: bm : ng = \frac{Gn \cdot bm}{Bm}$, e conseguentemente $\frac{bm}{FB} = \frac{Gn \cdot bm}{Bm \cdot FG}$. Dun- 36.

FIG.

que $\frac{Bm}{FB} = \frac{Gn}{FG}$, cioè $\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p}$, e $\sqrt{\frac{dr}{r}} = \sqrt{\frac{dp}{p}}$; e quindi la velocità nell' orbita eguale alla velocità nel cerchio alla stessa distanza dal centro della forza. Il che era ec.

201. Dim. 2.ª Questo Teorema si può dimostrare più brevemente così: La supposizione del *minimo* nell' angolo FBG dà $BFb = GBg$: ma i due angoli GBg, GFg, che hanno i lati rispettivamente perpendicolari gli uni agli altri, sono uguali: dunque $BFb = GFg$, cioè la velocità angolare del raggio vettore FB intorno ad F è uguale alla velocità angolare della normale FG intorno ad F; e conseguentemente pel Teorema III. anche la velocità del mobile nella Trajettoria sarà uguale alla velocità nel cerchio descritto alla stessa distanza. Il che era ec.

202. Scolio. Perchè l' angolo BFG nel passare allo stato infinitamente prossimo diventa bFg, il suo differenziale è perciò $bFg - BFG = GFg - BFb$, il quale fatto uguale a zero dà $GFg = BFb$, vale a dire la velocità angolare del raggio vettore FB intorno al centro $F =$ alla velocità angolare della normale FG intorno al medesimo centro: dunque pel Teor. III *la velocità del mobile nella Trajettoria descritta con qualunque legge di forza centrale allora diventa uguale alla velocità nel cerchio descritto alla stessa distanza dal centro della forza quando l' angolo compreso dal raggio vettore e dalla normale sulla tangente diventa massimo*: dico massimo, perchè quest' angolo si fa nullo quando il raggio vettore diventa normale alla curva.

Teorema VII.

37, e 38. 203. *Sia* R (Fig. 37, e 38) *il punto sublime, da cui il mobile dee cadere dalla quiete; affinchè nella*

data legge di forze centrali (centripeta nella Fig. 37., centrifuga nella 38.) colla caduta rettilinea per RA *acquisti in* A *la velocità tangenziale, colla quale viene descritta la trajettoria* ABK *in virtù d'una forza centrale tendente ad* S: *indi col centro* S, *e raggio* SR *si segni il cerchio* RHQ: *dico che la velocità tangenziale del mobile in qualsivoglia altro punto* B *della curva sarà quella che viene acquistata colla caduta per la sublimità* HB, *fra la periferia del cerchio, e il punto* B.

Dim. Col centro *S*, intervallo *SB* si delinei l' arco circolare *BD*, e per la Prop. 12.ª del Lib. I. de' *Principj* di Newton la velocità del mobile in *B* uguaglia la velocità nel punto equidistante, o equialto *D* acquistata dal corpo che cade dirittamente dal punto sublime *R*; ed è poi manifestamente la stessa cosa, sia che il corpo caschi per *RD*, sia per l'altezza uguale *HB*. Dunque ec. Il era ec.

204. Scol. Il cerchio *RHQ*, avverte opportunamente il P. Rolli *De Corporum Motu* §. 178. potersi chiamare *cerchio della sublimità*, il quale compete a tutte le Trajettorie descritte in virtù di qualche forza centrale, centripeta, o centrifuga secondo qualunque legge, potendo talvolta essere infinito ed anche più che infinito, come accade per la Parabola conica, e per l' Iperbola.

Teorema VIII.

205. *Se un mobile descrive con moto uniforme una linea retta, e nel piano qualunque, che passa per essa, si piglia dovunque un punto, dal quale si menano al mobile tante rette ai luoghi, dove successivamente si trova; le aje, o gli spazj triangolari rettilinei, che congiunto con queste rette il mobile descrive intorno al*

detto punto, sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

39. Dim. Sia *BC* (Fig. 39) la retta, che il mobile percorre uniformemente; e *DP*, *PC* due parti qualunque percorse in due diversi tempi. Dal punto *A* preso dovunque in un piano qualsivoglia, che passa per la retta *BC*, si menino al mobile le rette *AD*, *AP*, *AC*; le aje percorse dal mobile congiunto a tali rette ne' tempi indicati saranno i due triangoli *DAP*, *PAC*: ma questi per l'altezza loro comune in *A* stanno come le basi *DP*, *PC*, e queste basi pel moto equabile sono come i tempi impiegati a percorrerle: dunque le aje triangolari *DAP*, *PAC* descritte intorno al punto *A* sono come i tempi della loro descrizione. Il che era ec.

206. Cor. Dan. Bernoulli *nel Tom. I. degli Atti dell' Acc. di Berlino* chiama momento del moto circolare il prodotto della massa del mobile nella sua velocità circolare, e nella distanza dal punto, intorno a cui la retta congiungente questo punto col mobile si aggira circolarmente mentre il mobile corre con moto rettilineo uniforme. Ora *questo momento del moto circolare in tutti i punti della retta* BC *percorsa uniformemente dal mobile è sempre lo stesso*: In fatti essendo *Dd*, *Pp* due spazietti percorsi dal moblle in uno stesso istante e però uguali pel moto uniforme, se si conducono le rette *Ad*, *Ap*, e col centro in *A*, co' raggi *AD*, *AP* si descrivono gli archetti circolari infinitesimi *Dr*, *Pn*: l'uguaglianza de' triangoli infinitesimi *DAd*, *PAp* percorsi nel medesimo istante dà $Ad.Dr = Ap.Pn$, ovvero $AD.Dr = AP.Pn$, ed essendo gli archetti *Dr*, *Pn* la misura della velocità circolare concepita intorno al punto *A*, ne viene che chiamata *M* la massa del mobile il prodotto $M.AP.Pn$, vale a dire il momento del moto circolare concepito dal mobile intorno ad *A* è dovunque il medesimo.

TEOREMA IX.

207. *In tutte le Trajettorie descritte in virtù d'una forza centrale tendente ad un punto la velocità angolare (Fig. 36) della tangente* BG (*oppure della perpendicolare* FG *intorno al centro* F *della forza) è reciprocamente come il rettangolo sotto* FG , *e sotto il raggio osculatore in* B. 36.

DIM. La velocità angolare di FG intorno ad F è $= \frac{ng}{FG} = \frac{Bb}{ragg.\ oscul.}$; giacchè i raggi osculatori infinitamente prossimi essendo normali alle due tangenti BG, bg comprendono un angolo $= GBg = GFg$ per la stessa ragione. Ma $Bb = \frac{2\ triang.\ BFb}{FG}$. Dunque la detta velocità angolare è $= \frac{2\ triangoli\ BFb}{FG \times ragg.\ oscul.}$. E poichè l'ajuola BFb in un dato istante è sempre la stessa nella Trajettoria descritta con una forza centripeta tendente ad un punto, sarà la detta velocità come $\frac{1}{FG \times ragg.\ oscul.}$. Il che era ec.

PROBLEMA I.

208. *In una Trajettoria descritta da un mobile in virtù d'una forza centrale tendente ad un punto, supponendosi dato e costante il rapporto della velocità del mobile alla forza centrale (che è sempre un rapporto infinito), si cerca per un punto della curva qual esser debba l'angolo formato dalle direzioni del mobile, e della forza centrale, affinchè la curvatura della Trajettoria in tal punto sia la massima.*

SOL. Nella Trajettoria $SQAB$ (Fig. 40), dove C è il centro della forza, è data nel punto A la ragione di AO, ad OB, cioè dello spazio descritto 40.

in un istante dal mobile secondo la tangente allo spazio descritto per l'azione della forza centrale parallelamente ad AC. La curvatura in A è misurata dall'angolo OAB; e però si cerca sotto qual condizione questo angolo sarà massimo, dico *sotto qual condizione* relativamente all'angolo AOB, ovvero QAC formato dalle direzioni della forza centrale, e del mobile. Si abbassi da B sopra AO il perpendicolo BF, e sarà $BF = BO . sen. AOB$, $FO = BO . cos. AOB$, $tang. OAB = \frac{FB}{AF} =$

$$\frac{BO . sen. AOB}{AO - OF} = \frac{BO. sen. AOB}{AO - BO. cos. AOB} = \frac{sen. AOB}{\frac{AO}{BO} - cos. AOB}.$$

Perciò fatto $AOB = \varphi$, e il rapporto $\frac{AO}{BO} = I$, sarà $tang. OAB = \frac{sen.\varphi}{I - cos.\varphi}$; e quindi dovendo essere un massimo l'angolo OAB, e conseguentemente anche la sua tangente, avremo

$$\frac{Id\varphi \, cos.\varphi - d\varphi \, cos.\varphi^2 - d\varphi sen.\varphi^2}{(I - cos.\varphi)^2} = 0, \text{ ovvero}$$

$I cos.\varphi = 1$, ed in fine $cos.\varphi = \frac{1}{I} = 0$. Dunque $\varphi = AOB = 90°$, cioè *l'angolo fatto* dalla direzione del mobile, e dalla direzione della forza centripeta è retto nel punto dove la Trajettoria ha la massima curvatura. Il che era ec.

209. Scol. Per distinguere, se è massimo o minimo il valore della curvatura, prendo il secondo differenziale della $tang. OAB$, cioè il primo di $\frac{Id\varphi \, cos.\varphi - d\varphi}{(I - cos.\varphi)^2}$, che è

$$\frac{-Id\varphi^2 sen.\varphi (I - cos.\varphi)^2 - 2d\varphi^2 sen.\varphi (I - cos.\varphi)(Icos.\varphi - 1)}{(I - cos.\varphi)^4}$$

$$= \frac{-Id\varphi^2 sen.\varphi(I - cos.\varphi) - 2d\varphi^2 sen.\varphi(Icos.\varphi - 1)}{(I - cos.\varphi)^3}$$

$$= \frac{2d\varphi^2 sen.\varphi - I^2 d\varphi^2 sen.\varphi - Id\varphi^2 sen.\varphi cos.\varphi}{(I - cos.\varphi)^3},$$

quantità visibilmente negativa, la quale in conseguenza indica, che la curvatura cercata non è un minimo, ma un massimo.

Teorema X.

210. *Supposta la legge della forza quella del quadrato inverso delle distanze, la velocità del mobile in qualunque punto della Trajettoria (che in tal ipotesi è una Curva Conica) sta alla velocità nel cerchio descritto alla stessa distanza, e colla forza competente a quel luogo, in ragione suddwplicata del rettangolo fatto dal raggio vettore nel semiparametro* $\frac{1}{2}L$ *dell' asse principale al quadrato della normale abbassata dal fuoco o centro della forza sulla tangente.*

Dim. Per la Prop. 16. del Lib. I. de' Princ. di Newton le velocità del mobile in due diverse Trajettorie sono in ragione composta della inversa delle normali dal fuoco, e della diretta sudduplicata de' parametri degli assi principali. Dunque sta la velocità nella Curva alla velocità nel cerchio descritto alla stessa distanza come $\frac{\sqrt{L}}{p} : \frac{\sqrt{2r}}{r}$, giacchè nel cerchio il parametro è uguale al diametro $2r$. Dunque la velocità nella Curva sta alla velocità nel cerchio come $\sqrt{\frac{1}{2}Lr} : \sqrt{p^2}$. Il che èra ec.

211. Cor. Si è dimostrato nel Cor. II. del Teor. II., che in tutte le Trajettorie descritte con qualunque legge di forze sta $v^2 : c^2 :: Rp : r^2$. Ma nelle Trajettorie Coniche $v^2 : c^2 :: \frac{1}{2}Lr : p^2$. Dun-

que $Rp:r^2::\frac{1}{2}Lr:p^2$; e però $R=\frac{1}{2}L\frac{r^3}{p^3}$, cioè *nelle sezioni coniche il raggio osculatore è quarto proporzionale al cubo della normale dal fuoco sulla tangente, al cubo del raggio vettore, ed al semiparametro principale*. Questa proprietà delle sezioni Coniche per rapporto al raggio osculatore si deduce ancora dall'altra proprietà, che in queste Curve il raggio osculatore è uguale al cubo della perpendicolare n alla Curva prodotta sino all' asse principale diviso pel quadrato del semiparametro, cioè $R=\frac{n^3}{\frac{1}{4}L^2}$: imperciocchè guidando dal concorso di questa perpendicolare coll' asse principale una normale al raggio vettore il segmento di questo verso la Curva per le Dottrine Coniche è sempre uguale al semiparametro, e per li due triangoli rettangoli simili, che ne risultano, si ha la proporzione $r:p::n:\frac{1}{2}L$, e quindi $n^3=\frac{\frac{1}{8}L^3r^3}{p^3}$, ed in fine $R=\frac{1}{2}L.\frac{r^3}{p^3}$.

212. Scolio. Questo Teorema si può dimostrare anche senza far uso della Prop. citata di Newton, come segue: Abbiamo fatto vedere, Teor. II. Cor. II., che $v^2:c^2::Rp:r^2$; ma nelle Curve Coniche (come mostriamo nel Cor. di questo stesso Teorema) si ha $R=\frac{1}{2}L\frac{r^3}{p^3}$. Dunque $v^2:c^2::\frac{1}{2}L\frac{r^3}{p^2}:r^2::\frac{1}{2}Lr:p^2$. Il che era ec.

Teorema XI.

213. *Nelle Curve Coniche descritte in virtù d' una forza centrale tendente al fuoco sta la velocità in qualunque punto della curva alla velocità nel cerchio de.*

scritto alla stessa distanza dal centro della forza e colla forza centrale competente a quel punto della curva in ragione sudduplicata del raggio vettore condotto dal detto punto all' altro fuoco, che non è la sede della forza, al semiasse trasverso.

Dim. Si è già dimostrato, che $v^2 : c^2 :: \frac{1}{2} Lr : p^2$. Ora si chiami a il semiasse trasverso, b il semiasse conjugato, r' il raggio vettore condotto dall' altro fuoco; p' la normale da questo fuoco sulla tangente. Abbiamo $\frac{1}{2} L = \frac{b^2}{a}$; $r \pm r' = 2a$ (il segno superiore per l'ellisse, l'inferiore per l'iperbola), $r = 2a \mp r'$; $\frac{1}{2} Lr = \frac{b^2}{a}(2a \mp r')$. Inoltre si sa dalle Coniche, che $pp' = b^2$; $p = \frac{b^2}{p'}$; ed i triangoli simili danno $p : r :: p' : r'$; $p' = \frac{pr'}{r} = \frac{pr'}{2a \mp r'}$. Dunque $p = \frac{b^2}{p'} = \frac{b^2(2a \mp r')}{pr'}$, $p^2 = \frac{b^2}{r'}(2a \mp r')$. Dunque $v^2 : c^2 :: \frac{1}{a} : \frac{1}{r} :: r' : a$. Il che era ec.

Problema II.

214. *Rivolgendosi un mobile per un' Ellisse in virtù d' una forza centripeta tendente al fuoco, determinare per qualunque punto dell' Ellisse la sublimità, cioè l' altezza sopra il luogo del mobile nell' Ellisse in direzione del raggio vettore prolungato, dalla quale cascando il mobile dalla quiete verso il centro della forza acquista la velocità del moto ellittico in quel punto.*

Sol. Essendo r il raggio vettore, o la distanza del mobile dal centro della forza, f la forza centripeta in tale distanza, chiamo y nel mobile, che cade dalla richiesta sublimità, la distanza dal

centro, alla quale arriva dopo un certo tempo con una velocità v, e sarà $\frac{fr^2}{y^2}$ la forza attraente in questa distanza per la legge del quadrato inverso delle distanze richiesta dal moto ellittico colla forza residente nel fuoco. Avremo dunque $-\frac{fr^2dy}{y^2}=vdv$, ed integrando $\frac{fr^2}{y}=\frac{1}{2}v^2+Cost.$, e poichè suanisce v, quando y è uguale al raggio vettore congiunto colla linea S di sublimità, sarà perciò $v^2=\frac{2fr^2}{y}-\frac{2fr^2}{r+S}$, e posta $y=r$ si avrà per la velocità acquistata cadendo da S l'espressione $v^2=2fr-\frac{2fr^2}{r+S}=\frac{2frS}{r+S}$. Ma questa velocità dee per l'ipotesi uguagliare quella del moto ellittico corrispondente all'estremo di r e questa seconda sta alla velocità $\sqrt{2.f.\frac{1}{2}r}$ nel cerchio alla stessa distanza come $\sqrt{\frac{1}{2}Lr}:\sqrt{p^2}$, e però $\frac{\frac{1}{2}Lfr^2}{p^2}$ è il quadrato della velocità ellittica; dunque sarà $\frac{2frS}{r+S}=\frac{\frac{1}{2}Lfr^2}{p^2}$, cioè $4p^2S=Lr^2+LrS$, e quindi $S=\frac{Lr^2}{4p^2-Lr}=\frac{4p^2r}{4p^2-Lr}-r$. Ora io ho dimostrato nel Probl. delle Forze Centr. aggiunto alla Mecc. di Bossut tom. 2.° pag. 51, che posto a il primo asse dell'Ellisse, b il secondo è $4p^2=\frac{b^2r}{a-r}$; onde risulta $S=\frac{b^2r^2:(a-r)}{b^2r:(a-r)-Lr}-r$

$$= \frac{b^2 r^2}{b^2 r - Lra + Lr^2} - r = \frac{b^2 r}{b^2 - La + Lr} - r$$

$$= \frac{b^2 r}{Lr} - r = \frac{b^2}{L} - r = a - r =$$ al raggio vettore tirato dall'altro fuoco. Dunque *nel moto ellittico prodotto da una forza residente nel fuoco la linea di sublimità per qualunque punto dell'Elisse è il raggio vettore, che parte dall'altro fuoco*. Il che era ec.

Quindi nasce il seguente elegantissimo.

Teorema XII.

215. *Se un corpo si aggira per un' Ellisse in virtù d' una forza centripeta tendente ad uno de' fuochi, e se da questo fuoco come centro coll' intervallo eguale all' asse primario si descrive un cerchio; un mobile, che casca dalla circonferenza di questo cerchio verso il centro della forza, da cui è attratto, giunto al perimetro dell' Ellisse acquista quivi la velocità del moto ellittico, che compete a quel punto.*






ARTICOLO XVI.

Sopra il moto rettilineo de' corpi attratti ad un centro, ed in un mezzo resistente.

Problema I.

216. *Determinare il moto di un corpo, ossia punto, che si accosta, o si scosta da un punto dato, in virtù di una forza centrale tendente al detto punto, attraverso un mezzo comunque eterogeneo, e resistente in raggione duplicata delle velocità del mobile.*

Sol. Suppongo il mobile giunto alla distanza x dal centro della forza, ed aver quivi una velocità *dovuta* all'altezza v, ed esser ivi sollecitato da una forza centrale p. Pongo $= 1$ la forza della gravità terrestre, e chiamo q *l'esponente della resistenza*, del mezzo, cioè a dire l'altezza dovuta a quella velocità, colla quale movendosi il corpo sente una resistenza uguale alla gravità, ossia $= 1$. Le specie p, q sono funzioni della x. Dalla legge supposta della resistenza del mezzo, cioè dall'esser questa proporzionale al quadrato della velocità del mobile si ricava, che alla distanza x la resistenza da esso incontrata è $= \frac{v}{q}$. Ora se si suppone, che il corpo discenda verso il centro, e che la forza centrale p sia centripeta, verrà egli sollecitato alla discesa dalla forza $= p - \frac{v}{q}$; e però moltiplicando questa forza sollecitatrice per l'elemento $-dx$ dello spazio percorso risulterà il prodotto

$\frac{vdx}{q} - pdx = dv$. Per giugnere all' integrazione di quest' equazione, la moltiplico per il fattore idoneo Q, ed ho $Qdv - \frac{Qvdx}{q} = - Qpdx$, essendo Q una funzione di x. Assunto Qv per l' integrale del primo membro di quest' equazione, dovrà essere $Qdv - \frac{Qvdx}{q} = d.Qv = Qdv + vdQ$, e quindi $\frac{dQ}{Q} = - \frac{dx}{q}$, cioè integrando $log.Q = -\int\frac{dx}{q}$, e preso e per la base de' logaritmi iperbolici, e fatto passaggio da' logaritmi a' numeri sarà $Q = e^{-\int\frac{dx}{q}}$. Avremo dunque $Qv = -\int Qpdx$, vale a dire $v = - e^{\int\frac{dx}{q}} \int e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx$. Suppongo, che alla distanza a dal centro della forza il mobile non abbia alcuna velocità, ed incominci a muoversi da tal distanza, e prendo X per l' integrale $\int e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx$ determinato in maniera, che esso svanisca quando $x = 0$: indi supposto, che X diventi A quando $x = a$, risulta . . .

$$v = e^{\int\frac{dx}{q}}\left(A - X\right) \quad (*).$$

(*) Se supponghiamo, che l' integrale indefinito $\int e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx$ sia X', e che questo diventi B quando $x = 0$; avremo $X = X' - B$. Suppongo ora, che X' si

Inoltre chiamando t il tempo della discesa per la distanza x, sarà $-dt = -\frac{dx}{\sqrt{v}}$ (**), ovvero $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, e sostituito il valore di $\sqrt{v}$, nasce $dt = \frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}\sqrt{(A-X)}}$, e $t = \int\frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}\sqrt{(A-X)}}$. Il che era ec.

217. Cor. I. La velocità del mobile giunto al centro della forza si ritrova con fare $x = 0$ nell' espressione di v, e con pigliare l'integrale $\int\frac{dx}{q}$ in modo, che svanisca insieme colla x (***), come

---

cangi in C quando $x = a$, ed $X = A$, ed ho $A = C - B$. Sostituisco questi valori di X, e di A nell' equazione $v = e^{\int\frac{dx}{q}}(A-X)$, e trovo $v = e^{\int\frac{dx}{q}}(C - X')$. Questa stessa equazione appunto si ritrova mediante la determinazione della costante per compire l' integralle $\int e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx = X' + Cost.$; avvegnachè abbiamo $v = -e^{\int\frac{dx}{q}}(X' + Cost.)$, e per ipotesi $v = 0$, quando $x = a$, e $X' = C$; ond' è $Cost. = -C$; e quindi $v = e^{\int\frac{dx}{q}}(C - X')$.

(**) Si tralascia quì, e in appresso, per semplificare il calcolo, di prefiggere a v il coefficiente costante, che per le leggi della gravità terrestre viene determinato.

(***) Nell'integrazione della formola $\int e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx$ si aggiugne una sola costante arbitraria senza aggiugnere

svanisce pel supposto anche X. Per conseguenza tale velocità sarà dovuta ad A.

218. Cor. II. Il mobile acquista la *massima* velocità, allorchè diventa $v = pq$, perchè allora sostituito questo valore di v nell'equazione differenziale $dv = -pdx + \frac{vdx}{q}$ risulta $dv = 0$. Conseguentemente il luogo, dove il mobile trovasi avere la massima velocità, viene determinato dalla risoluzione dell'equazione $pq = e^{\int \frac{dx}{q}} (A - X)$.

---

altra costante all'integrale $\int \frac{dx}{q}$ dell'esponente di e, perchè qualunque sia questa seconda costante, che voglia aggiugnersi, ella esce dal calcolo per la ragione, che chiamata essa φ abbiamo $v = -e^{\int \frac{dx}{q}} \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx =$
$- e^{\int \frac{dx}{q} + \varphi} \int e^{-\int \frac{dx}{q} - \varphi} pdx = \ldots\ldots\ldots,$
$- e^{\varphi - \varphi} . e^{\int \frac{dx}{q}} \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx = \ldots\ldots\ldots$
$- e^{\int \frac{dx}{q}} \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx$, dove φ è sparita. Dunque sarà lecito prendere per $\int \frac{dx}{q}$ un integrale *particolare*, dando alla costante aggiuntavi il valore opportuno per conciliare al detto integrale la forma più comoda e semplice. Ved. *Eul. Calc. Int.* tom. I. §. 421. 422.

Problema II.

219. *Data la legge della forza centripeta, e supposta la resistenza del mezzo in ragione de' quadrati delle velocità del mobile, e date inoltre le velocità, che il mobile acquista nel cadere da quali altezze si vogliano nel centro della forza, si cerca la densità del mezzo in qualunque luogo particolare.*

Sol. Chiamisi x qualunque distanza del mobile dal centro della forza, p la forza stessa in quella distanza; e poichè sono date le velocità, che acquista il mobile nel cadere da qualsivoglia distanza nel centro, dicasi H l'altezza *dovuta* alla velocità acquistata dal mobile cadendo nel centro dalla distanza a, così che H sia una funzione nota di a. Parimente nominando R l'altezza *dovuta* alla velocità, con cui il mobile giugne al centro venendo dalla distanza x, sarà R una tal funzione di x, quale per l'appunto è H di a. Ma pel Cor. I. del Probl. prec. $H = A$; dunque qual funzione di a è la quantità A, tal funzione di x è la R. Ma per la soluz. del Probl. cit. anche la X è egual funzione di x, come la A di a; dunque $R = X =$

$$\int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx\text{, e differenziando, } dR = \ldots$$

$$= e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx\text{, ovvero } e^{\int \frac{dx}{q}} = \frac{pdx}{dR}\text{, e}$$

facendo passaggio ai logaritmi $\int \frac{dx}{q} = log. \frac{pdx}{dR}$, e differenziando di nuovo supposta costante la dx sarà $\frac{dx}{q} = \frac{dpdx}{pdx} - \frac{ddR}{dR} = \frac{dpdR - pddR}{pdR}$; donde nasce $q = \frac{pdxdR}{dpdR - pddR}$. Sarà dunque noto l'esponen-

te q della resistenza per qualunque luogo, ossia per ogni distanza x dal centro della forza. Ora siccome la densità del mezzo si misura della resistenza, che incontra il corpo, il qual si muove con una velocità conosciuta *generata* dall' altezza c, ed è generalmente la resistenza $= \frac{v}{q}$, sarà perciò per qualunque distanza x la densità del mezzo $\Delta = \frac{\lambda c}{q} = \frac{\lambda c(dpdR - pddR)}{pdxdR}$, essendo λ un coefficiente costante. Il che era ec.

220. Cor. I. Supposto $R = \mu x$, e però $ddR = 0$, si ha $\Delta = \frac{\lambda cdp}{pdx}$; e se ora si assume la forza centripeta $p = \delta x^n$, e quindi $dp = n\delta x^{n-1}dx$ trovasi $\Delta = \frac{n\lambda c}{x}$, vale a dire la densità del mezzo risulta inversamente proporzionale alle distanze dal centro della forza.

221. Cor. II. Se si assume costante la forza centripeta, cioè $n = 0$, ritenuto $R = \mu x$, apparisce $\Delta = 0$, cioè nulla la densità del mezzo, e la sua resistenza; il che costituisce il caso del mobile, che discende nel vuoto in virtù d' una forza sollecitatrice uniforme.

222. Cor. III. Qualora la forza centripeta sia in qualche ragione inversa delle distanze, allora essendo n negativo trovasi la densità Δ negativa, il che indica, doversi la resistenza trasformare in una forza impellente il mobile verso il centro.

Problema III.

223. *Supponendo note le velocità acquistate dal mobile nel cadere da qualunque alezza sino al centro*

della forza, e data la densità del mezzo in qualsivoglia luogo, determinare la forza centripeta del mobile.

Sol. Essendo la densità del mezzo $\Delta = \frac{\lambda c}{q}$, e supponendosi nota Δ per qualunque luogo, dove il mobile si trova successivamente nel suo cammino, sarà perciò noto anche l'esponente q della resistenza. Ora nella soluz. del Probl. prec. si è trovato $\frac{pdx}{dR} = e^{\int \frac{dx}{q}}$, ovvero $p = \frac{dR}{dx} e^{\int \frac{dx}{q}}$, che è un valore determinato per essersi preso (Probl. I. Cor. I.) l'integrale $\int \frac{dx}{q}$ in maniera, che svanisca quando $x = o$. E' dundue data la forza p. Il che era ec.

Problema IV.

224. *Data la densità del mezzo a qualunque distanza dal centro della forza, e supposta la sua resistenza proporzionale al quadrato della velocità del mobile, determinare qual sarà quella forza centripeta, in virtù della quale cadendo il mobile nel centro metterà sempre lo stesso tempo a giugnervi qualùnque sia la distanza, da cui parte.*

Sol. Il tempo della discesa del mobile per l'altezza x si è trovato (Probl. I.) $= \ldots$ $\int \frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{q}} \sqrt{(A - X)}}$, dove X esprime il valore dell'integrale $\int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx$ preso in modo, che svanisca ponendo $x = o$, ed A è il valore, in cui si trasforma X quando si fa $x = a$. Da ciò si

fa manifesto, che per avere il tempo della discesa per tutta l'altezza a sino al centro, si dee nell'integrale $\int \frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}\sqrt{(A-X)}}$ sostituire a in luogo di x. E siccome per ipotesi l'espressione d'un tal tempo dee rappresentare lo stesso valore per tutte le distanze a comunque varie all'infinito, quindi è, ch'ella esser dovrà affatto indipendente da a, cioè non contener punto la specie a: il che accaderà ogni qual volta l'integrale

$\int \frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}\sqrt{(A-X)}}$ sarà una funzione di a, ed x, ovvero di A, ed X di dimensione nulla; onde tale pur anco sarà il differenziale

$\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}\sqrt{(A-X)}}$. Facciasi dunque $\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}} = \frac{dX}{P}$, e il differenziale del tempo proposto sarà

$\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}\sqrt{(A-X)}} = \frac{dX}{P\sqrt{(A-X)}}$, dove A, ed X hanno per dimensione $\frac{1}{2}$; e conseguentemente anche P dovrà avere $\frac{1}{2}$ di dimensione, affinchè risulti in $\frac{dX}{P\sqrt{(A-X)}}$ una dimensione nulla. Da ciò si raccoglie, che la forma di P dovrà essere $P = \frac{\sqrt{X}}{b}$; con che si ha l'elemento del tempo $= \frac{bdX}{\sqrt{(AX-XX)}}$, il quale ha per l'appun-

to il detto requisito. Laonde avremo $\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}} = \frac{dX}{p} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}$, ed integrando $2b\sqrt{X} = \int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}$, il qual integrale ha da prendersi tale, che si annulli allorchè $x = 0$; e quadrando quest' equazione, sarà $X = \frac{1}{4b^2}\left(\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}\right)^2 = \int e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx$, di cui preso il differenziale, si ottiene $\frac{dx}{2b^2 e^{\int\frac{dx}{2q}}}\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}} = e^{-\int\frac{dx}{q}} pdx$, e finalmente $p = \frac{e^{\int\frac{dx}{2q}}}{2b^2}\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}$. Il che era ec.

225. Cor. I. Poichè $\frac{bdX}{\sqrt{(AX - XX)}}$ è $= \frac{2b}{A}\cdot\frac{\frac{1}{2}AdX}{\sqrt{(AX - XX)}}$, sarà perciò il tempo della discesa per l'altezza x, cioè $\int\frac{bdX}{\sqrt{(AX - XX)}} = \frac{2b}{A}$ moltiplicato per l'arco di cerchio avente per

seno verso X, e per diametro A; e conseguentemente il tempo di tutta la discesa per l'altezza a è uguale a $\frac{2b}{a}$ moltiplicato per l' arco circolare, che ha per seno verso il suo diametro A, cioè moltiplicato per la semicirconferenza. Ma prendendo $\pi : 1$ pel rapporto della circonferenza al diametro, risulta la predetta semicirconferenza $= \frac{1}{2}\pi A$: sarà dunque il tempo della caduta per l'altezza a espresso da $\frac{2b}{A} \times \frac{1}{2}\pi A = b\pi$, che è una quantità costante, e affatto indipendente dall' alltezza a, sic come esser dee.

226. Cor. II. Essendo $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2b\sqrt{X}$, e

$$\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}, \text{ sarà } e^{\int \frac{dx}{2q}} = \frac{dx\sqrt{X}}{bdX}.$$

Laonde avremo il valore della forza centripeta

$$p = \frac{e^{\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{Xdx}{b^2dX}.$$

227. Cor. III. Se il mezzo resistente è uniforme, e però q uguale ad una costante k, allora avremo $e^{\int \frac{dx}{2q}} = e^{\frac{x}{2k}}$, ed inoltre $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$

$= 2k\left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)$, prendendo quest' integrale in modo, che svaniscano insieme colla x. Sarà dunque in quest' ipotesi la forza centripeta $p = \frac{k}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2k}} - 1\right)$, la quale nel centro, dove $x = 0$, diventa nulla.

218. Cor. IV. Inerendo al supposto del mezzo uniforme, cioè di $q = k$, abbiamo $2b\sqrt{X} = 2k\left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)$, e quadrando $X = \ldots$ $\frac{k^2}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)^2$. E siccome X si trasforma in A allorchè $x = a$; sarà $A = \frac{k^2}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2$. Dunque l' altezza dovuta alla velocità del mobile giunto alla distanza x dal centro sarà $v = e^{\int\frac{dx}{q}}(A - X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{k^2}{b^2}e^{\frac{x}{k}}\left[\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)^2\right]$.

229. Cor. V. In questa ipotesi del mezzo uniforme l' altezza dovuta alla velocità dal mobile acquistata nel giugnere al centro della forza trovasi $= A = \frac{k^2}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2$.

230. Cor. VI. Nella stessa ipotesi, il mobile acquista la massima velocità allorchè $v = pk$, cioè

$\frac{k^2}{b^2} e^{\frac{x}{k}} \left[\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)^2\right] = \frac{k^2}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2k}} - 1\right)$, ovvero $\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)^2 = e^{-\frac{x}{k}}\left(e^{\frac{x}{2k}} - 1\right) = \ldots e^{-\frac{x}{2k}}\left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)$; dal che si ricava $\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2 = 1 - e^{-\frac{x}{2k}}$, e quindi $e^{-\frac{x}{2k}} = 2e^{-\frac{a}{2k}} - e^{-\frac{a}{k}} = e^{-\frac{a}{k}}\left(2e^{\frac{a}{2k}} - 1\right)$; donde si ricava, facendo passagio da' numeri a' logaritmi, il luogo della massima velocità $x = 2a - 2k\,log.\left(2e^{\frac{a}{2k}} - 1\right)$.

231. Scolio. Se si prende l'esponente della resistenza q negativo, si trasforma la discesa del corpo in salita, ed il Problema delle discese equitemporanee si cangia in quello delle ascensioni isocrone dal centro ad ogni altezza qualunque, dove il valor cercato della forza centripeta p si ha dalle formole ritrovate cangiando in esse la specie q in $-q$. Così per le salite isocrone del mobile sarà $p = \frac{e^{-\int\frac{dx}{2q}}}{2b^2}\int e^{\int\frac{dx}{2q}}\,dx$, e nel caso del mezzo uniforme $p = \frac{k}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)$.

232. Cor. VII. Se il corpo discende nel vuoto, così che *sia* la densità del mezzo $\Delta = o$, ovvero $q = k = \infty$, allora la forza centripeta (Cor. III.) trovasi $p = \frac{k}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2k}} - 1\right) = \frac{k}{b^2}\left(1 + \frac{x}{2k} - 1\right) = \frac{x}{2b^2}$, vale a dire in ragione semplice diretta delle distanze dal centro, che è un Teorema notissimo della dottrina delle forze centrali ne' mezzi non resistenti. L'altezza poi dovuta alla velocità del mobile nella distanza x del centro della forza essendo (Cor. IV.)

$$v = \frac{k^2}{b^2} e^{\frac{x}{k}} \left[\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)^2 \right],$$

ed $\left(1 - e^{-\frac{a}{2k}}\right)^2 = \frac{a^2}{4k^2}$; $\left(1 - e^{-\frac{x}{2k}}\right)^2 = \frac{x^2}{4k^2}$, avrà per valore $v = \frac{a^2 - x^2}{4b^2}$, che nel centro della forza diventa $v = \frac{a^2}{4b^2}$, e quivi essa è massima: il che si deduce anche dal Cor. VI., dove abbiamo trovato il luogo della velocità massima $x = 2a - 2k \log\left(2e^{\frac{a}{2k}} - 1\right)$, il qual valore nell'ipotesi presente di $k = \infty$ diventa $2a - 2k \log.\left[2\left(1 + \frac{a}{2k}\right) - 1\right] = 2a - \ldots$ $2k \log.\left(1 + \frac{a}{k}\right) = 2a - 2k \times \frac{a}{k} = o$.

ARTICOLO XVII.

Sopra alcune Formole relative alle dimensioni della Terra, proposte da Maupertuis senza dimostrazione nel suo Trattato sulla Parallasse della Luna.

L'operetta di Maupertuis sulla *Parallasse della Luna* è un modello di precisione e di eleganza geometrica, ma lascia nell'animo del Lettore il rincrescimento di non incontrarvi le dimostrazioni di quelle formole elegantissime, che l'Autore propone, e che formano tutta l'orditura di quello squisito lavoro. Essendo tali formole di gran conseguenza ed importanza ne' Trattati solenni di Fisica, che concernono la Gravità, e la Figura della Terra, ho creduto non inutile a' Giovani studiosi, per loro facilitarne l'intelligenza, di recar qui le seguenti dimostrazioni.

233. Sia la Terra una sferoide compressa, formata dalla rivoluzione d'un'Ellisse, di cui EDP (Fig. 41) è il quarto, attorno il suo asse minore CP, che differisce molto poco dall'asse maggiore CE, che è il semidiametro dell'equatore. Si descriva intorno a quest'Ellissoide il globo $E\Delta\Pi$, il quale abbia lo stesso equatore: Si sa che se da un punto D dell'Ellissoide si tira una linea DG perpendicolare all'arco del meridiano in D, il raggio del globo tirato dal centro C parallelamente alla linea DG determinerà sul globo il punto Δ che ha la medesima latitudine che il punto D sull'Ellissoide. 41.

Si guidino dal punto Δ la retta ΔQ parallela all' asse PC, dal punto D la retta DS perpendicolare all'asse, dal punto C pel punto M, dove l'ordinata del cerchio incontra l' Ellisse, la retta CN, e si prolunghi la perpendicolare DG all' Ellisse sino al suo incontro coll' asse in H.

234. Facciasi il semidiametro CE dell' equatore $= r$; la così detta ellitticità $P\Pi = \delta$; $Q\Delta = s$, seno di latitudine; $CQ = c$, coseno di latitudine.

Si avrà

$$1.^\circ \quad M\Delta = \frac{s\delta}{r}$$

$$2.^\circ \quad MN = \frac{ss\delta}{rr}$$

$$3.^\circ \quad DO = \frac{css\delta}{r^3}$$

$$4.^\circ \quad MO = \frac{ccs\delta}{r^3}$$

$$5.^\circ \quad OB = \frac{s^3\delta}{r^3}$$

$$6.^\circ \quad MB = \frac{ccs\delta + s^3\delta}{r^3} = \frac{s\delta}{r} = M\Delta$$

$$7.^\circ \quad N\Delta = MD = \frac{cs\delta}{rr}$$

$$8.^\circ \quad MN = BD = \frac{ss\delta}{rr}$$

$$9.^\circ \quad CG = \frac{2c\delta}{r}$$

$$10.^\circ \quad CH = \frac{2s\delta}{r}$$

$$11.^\circ \quad GH = 2\delta.$$

DIM. 1.° $M\Delta = \frac{s\delta}{r}$.

Per la proprietà dell' Ellisse, e del cerchio circoscritto sta $C\Pi : Q\Delta :: C\Delta : Q\Delta :: r : s :: P\Pi : M\Delta :: \delta : M\Delta = \frac{s\delta}{r}$. Il che era ec.

DIM. 2.° $MN = \frac{ss\delta}{rr}$.

Avuto riguardo alla piccolezza dell' arco $N\Delta$ a motivo della poca differenza dell' Ellissoide dalla sfera si può considerare come rettilineo il triangolo $M\Delta N$; e però abbiamo $r : s :: M\Delta : MN :: \frac{s\delta}{r} : MN = \frac{ss\delta}{rr}$. Il che era ec.

DIM. 3.° $DO = \frac{css\delta}{r^3}$.

Posta $DT = y$, $CT = x$, $CP = a$, l'equazione all' Ellisse dà $y^2 = \frac{a^2}{r^2}(r^2 - x^2)$; e però la sottonormale $GT = \frac{ydy}{dx} = \frac{a^2x}{r^2}$. I triangoli simili ΔCQ, DGT danno l'analogia $CQ : Q\Delta :: c : s :: \frac{a^2x}{r^2} : \frac{a^2sx}{cr^2} = DT = y$. Dunque quadrando $\frac{a^2}{r^2}(r^2 - x^2) = \frac{a^4s^2x^2}{c^2r^4}$, ovvero $r^2 - x^2 = \frac{a^2s^2x^2}{c^2r^2}$; e quindi $x^2 = \frac{c^2r^4}{a^2s^2 + r^2c^2} = \ldots\ldots \frac{c^2r^4}{r^4 - (r^2 - a^2)s^2}$. Ora essendo $r - a = \delta$, ed $r = a + \delta$, $r^2 = a^2 + 2a\delta$, trascurando per la loro picciolezza le potenze di δ, sarà $r^2 - a^2 = 2a\delta$;

e però $x^2 = \frac{c^2 r^4}{r^4 - 2as^2\delta} = c^2 + \frac{2ac^2 s^2 \delta}{r^4} = c^2 + \frac{2(r-\delta)c^2 s^2 \delta}{r^4} = c^2 + \frac{2c^2 s^2 \delta}{r^3}$. Estratta la radice quadrata, sarà $x = c + \frac{css\delta}{r^3}$; onde per ultimo $CT - CQ = DO = x - c = \frac{css\delta}{r^3}$. Il che era ec.

Dim. 4.° $MO = \frac{ccs\delta}{r^3}$.

Per la piccolezza dell' arco MD, si riguarda esso come una linea retta, e la similitudine de' triangoli $MOD, \Delta CQ$ ci offre l'analogia $\Delta Q : QC :: s : c :: DO : MO :: \frac{css\delta}{r^3} : \frac{ccs\delta}{r^3} = MO$. Il che era ec.

Dim. 5.° $OB = \frac{s^3\delta}{r^3}$.

Per li triangoli simili $BOD, \Delta CQ$ abbiamo $CQ : Q\Delta :: c : s :: DO : OB :: \frac{css\delta}{r^3} : \frac{s^3\delta}{r^3} = OB$. Il che era ec.

Dim. 6.° $MB = \frac{ccs\delta + s^3\delta}{r^3} = \frac{s\delta}{r} = M\Delta$

Questo è di per se evidente.

Dim. 7.° $N\Delta = MD = \frac{cs\delta}{rr}$.

Per li triangoli simil $C\Delta Q$, $M\Delta N$, MBD abbiamo $C\Delta : CQ :: r : c :: M\Delta : \Delta N :: \frac{s\delta}{r} : \frac{cs\delta}{r^2} = N\Delta$; e parimente $r : c :: MB : MD :: \frac{s\delta}{r} : \frac{cs\delta}{r^2} = MD$. Il che era ec.

DIM. 8.° $MN = BD = \frac{ss\delta}{rr}$

I triangoli simili ΔCQ, MBD danno $C\Delta : Q\Delta :: r : s :: BM : BD :: \frac{s\delta}{r} : \frac{ss\delta}{rr} = BD = MN$ per la stessa ragione. Il che era ec.

DIM. 9.° $CG = \frac{2c\delta}{r}$

Abbiamo $CG = CT - TG = x - \frac{a^2 x}{r^2} = \frac{(r^2 - a^2)x}{r^2} = \frac{2a\delta x}{r^2}$ (n.° 3.). Ma abbiamo pur trovato $x = c + \frac{css\delta}{r^2}$. Dunque, trascurate sempre le potenze di δ, sarà $GC = \frac{2ac\delta}{r^2}$; e per essere $a = r - \delta$, ne verrà $GC = \frac{2c\delta}{r}$. Il che era ec.

DIM. 10.° $CH = \frac{2s\delta}{r}$.

Dalla similitudine de' triangoli ΔCQ, CHG nasce l'analogia $CQ : Q\Delta :: c : s :: CG : CH :: \frac{2c\delta}{r} : \frac{2s\delta}{r} = CH$. Il che era ec.

DIM. 11.° $GH = 2\delta$

Per l'angolo retto GCH abbiamo $GH = \sqrt{(CG^2 + CH^2)} = \sqrt{\left(\frac{4c^2\delta^2 + 4s^2\delta^2}{r^2}\right)} = \sqrt{4\delta^2} = 2\delta$. Il che era ec.

235. Due altre linee esprime nel citato Libro in valori analitici il Maupertuis, cioè la normale DG al punto D dell'Ellisse, ed il raggio osculatore allo stesso punto D; e ritrova

I.° $DG = r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}$

II.° Ragg. Osc. $= r - 2\delta + \frac{3ss\delta}{rr}$.

Ecco pertanto la dimostrazione anche di questi valori

Dim. I.

Si è trovato $GT = \frac{a^2x}{r^2}$, e $\overline{GT}^2 = \frac{a^4x^2}{r^4}$, $\overline{DT}^2 = a^2 - \frac{a^2x^2}{r^4}$. Dunque $\overline{DG}^2 = \frac{a^4x^2}{r^4} + a^2 - \frac{a^2x^2}{r^4} = \frac{r^4a^2 - (r^2 - a^2)a^2x^2}{r^4} = \frac{a^2}{r^2}\left[\frac{r^4 - (r^2 - a^2)x^2}{r^2}\right] = \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{r^4 - 2a\delta x^2}{r^2}\right)$; e perchè $x^2 = c^2 + \frac{2ccss\delta}{r^3}$; sarà quindi $\overline{DG}^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(r^2 - \frac{2acc\delta}{r^2}\right)$. Laonde estraendo la radice avremo $DG = \frac{a}{r}\left(r - \frac{ac^2\delta}{r^3}\right) = a - \frac{a^2c^2\delta}{r^4} = r - \delta - \frac{a^2c^2\delta}{r^4} = r - \delta - \ldots\ldots \frac{(r^2 - 2a\delta)c^2\delta}{r^4} = r - \delta - \frac{c^2\delta}{r^2} = r - 2\delta + \frac{ss\delta}{r^2}$. Il che era ec.

Dim. II.

Si sa dalle sezioni coniche, che in tutte queste curve il raggio osculatore è uguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro dell' asse, a cui termina la normale; e però essendo la normale $DG = r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}$, ed il semiparame-

tro $= \frac{a^2}{r} = \frac{r^2 - 2r\delta}{r} = r - 2\delta$, sarà il Ragg. Osc. $= \frac{\left(r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}\right)^2}{r^2 - 4r\delta} = \frac{r^3 - 6r^2\delta + 3ss\delta}{r^2 - 4r\delta}$ $= r - 2\delta + \frac{3ss\delta}{rr}$. Il che era ec.

236. I calcoli precedenti avendo somministrato a Maupertuis tutte le dimensioni della Terra, egli se ne vale per determinare i punti, verso i quali tende la *gravità attuale* nè diversi luoghi della Terra, ovvero per ritrovare le linee CG, ossia le distanze del centro terrestre dai punti di concorso delle perpendicolari DG col diametro dell'equatore. Con ciò è anche facile determinare i punti F, ai quali tende la *gravità primitiva*, cioè la gravità non alterata dalla forza centrifuga, e così ritrovare le linee CF, e i piccioli angoli FDG formati dalle direzioni della *gravità primitiva* con quelle della *gravità attuale*.

237. Posta la *gravità attuale* in $D = P$, la forza centrifuga all'equatore, della quale si conosce il rapporto alla gravità, $= F$; si hanno i valori seguenti:

1.° *Forza Centrifuga in* $D = \frac{c}{r} . F$.

2.° . . . . $GF = c . \frac{F}{P}$

3.° . . . . $CF = \frac{2c\delta}{r} - c . \frac{F}{P}$

4.° Angolo $GDF = \frac{cs}{rr} . \frac{F}{P}$.

Dim. 1.ª *Forza Centrifuga in* $D = \frac{c}{r} . F$.

Essendo le forze centrifughe come i raggi de' cerchj descritti nel medesimo tempo, sarà perciò

$CE:SD::F:\frac{SD}{CE}.F =$ *Forza Centrif. in D*. Ma si è trovato $x^2 = c^2 + \frac{2ccss\delta}{r^3}$, e però $x = c + \frac{css\delta}{r^3} = SD$, e si sa inoltre essere F una frazione molto piccola, come lo è anche δ. Dunque trascurando il prodotto delle due quantità F, e δ, sarà $\frac{SD}{CE}.F = \left(c + \frac{css\delta}{r}\right)\frac{F}{r} = \frac{c}{r}.F$. Il che era ec.

DIM. 2.ª $GF = c.\frac{F}{P}$.

Poichè DF è la direzione della *gravità primitiva*, e DG quella della *gravità attuale*, alterata dalla forza centrifuga, che agisce in D parallelamente alla linea FG, ne viene in conseguenza dover essere DG diagonale d'un parallelogrammo, i cui lati contigui sono DF, FG, ed essere in conseguenza $DG:GF::P:\frac{c}{r}.F$, e quindi $GF = \frac{cF}{rP}.DG$. Si è poi trovato precedentemente la normale $DG = r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}$; perciò trascurati i termini contenenti il prodotto $F\delta$ nasce $GF = \ldots \frac{cF}{rP}\left(r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}\right) = c.\frac{F}{P}$. Il che era ec.

DIM. 3.ª $CF = \frac{2c\delta}{r} - c.\frac{F}{P}$.

$CF = CG - GF = \frac{2c\delta}{r} - c.\frac{F}{P}$. Il che era ec.

DIM. 4.ª *Angolo* $GDF = \frac{cs}{rr}.\frac{F}{P}$.

Nel triangolo DGF sta DG a GF come il seno dell'angolo DFG al seno dell'angolo FDG, oppure (per la picciolezza dell'angolo FDG) come il seno di DGE al seno di FDG, cioè $P:\frac{c}{r}.F::$

$s : \frac{cs}{r} . \frac{F}{P} = sen. FDG =$ all' archetto, che è misura dell' angolo *FDG*. Dunque dividendo quest' archetto pel raggio $DG = r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}$, ed omettendo al solito il prodotto δF, sarà l'angolo $FDG = \frac{cs}{rr} . \frac{F}{P}$. Il che era ec.

238. Dall' espressione dianzi ritrovata del raggio osculatore dell' Ellissoide Terrestre per qualunque punto *M* si può trarre la dimostrazione d' un altro importante Teorema di Maupertuis nell' Opera citata, che viene enunziato così: *Prendendo* G *pel grado della Sfera* EΔΠ *circoscritta allo Sferoide Terrestre, ed il rapporto di* r *a* g *per quello del raggio al grado, ed essendo* s, c *il seno, e coseno del grado che si cerca nello Sferoide Terrestre, ed* s', c' *il seno e coseno del grado prossimo seguente; la formola* $G - \frac{gs^2\delta}{r^2} + \frac{2cs\delta}{rr} - \frac{2c's'\delta}{rr}$ *esprime la lunghezza del grado del meridiano dell' Ellissoide Terrestre*. Eccone la dimostrazione:

Dim. Per la piccola differenza del meridiano ellittico Terrestre dal cerchio dell' equatore, e per la poca estensione di un grado del detto meridiano relativamente a tutta la circonferenza, si può riguardare un tal arco di un grado del meridiano terrestre come un arco di cerchio, che ha per semidiametro il raggio osculatore dell' Ellisse nel punto corrispondente al grado proposto; ed essendo gli archi simili di diversi cerchj in proporzione de' loro raggi, sarà perciò l' arco *G* d' un grado nella Terra Sferica all' arco d' un grado nella Sferoidale come il raggio *r* dell' equatore al raggio osculatore $r - 2\delta + \frac{3ss\delta}{rr}$. Dunque la lunghezza del grado dell' Ellis

soide Terrestre è $G - \frac{2\delta G}{r} + \frac{3ss\delta G}{r^3}$. Considero ora G, a motivo della sua piccolezza, a guisa d' un elemento o differenziale dell' arco circolare di raggio r, e di seno s, cosicchè chiamando φ un tàl arco abbiasi $G = d\varphi$, ed $ssG = d\varphi\, sen.\, \varphi^2$; e siccome dal Calcolo Integrale si ha $\int d\varphi\, sen.\, \varphi^2 = \frac{1}{2}rr\varphi - \frac{1}{2}r\, sen.\, \varphi\, cos\, \varphi$, e differenziando, $d\varphi\, sen.\, \varphi^2 = ssG = \frac{1}{2}rrd\varphi - \frac{1}{2}r\, d.\, sen.\, \varphi cos.\varphi = \frac{1}{2}rrG - \frac{1}{2}r\, d.\, sc$; conseguentemente moltiplicando per $\frac{3\delta}{r^3}$ si avrà $\frac{3ss\delta}{r^3}G = \frac{3\delta}{2r}G - \frac{3\delta.\, d.\, sc}{2r^2}$, che sostituito nell' espressione del grado ricercato dà $G - \frac{\delta}{2r}G - \frac{3\delta}{2r^2}d.sc$. Aggiungo, e tolgo da quest' espressione la quantità $\frac{\delta}{2r^2}d.sc$; e con ciò ottengo pel valore del grado $G + \frac{\delta}{2r^2}d.sc - \frac{\delta}{2r}G - \frac{2\delta}{rr}d.sc$. E poichè $d.sc = d.sen\, \varphi \times cos.\, \varphi = \frac{d\varphi\, cos.\, \varphi^2}{r} - \frac{d\varphi\, sen.\, \varphi^2}{r} = rd\varphi - \frac{2d\varphi\, sen.\, \varphi^2}{r} = rG - \frac{2ss}{r}G$; e moltiplicando per $\frac{\delta}{2r^2}$, nasce $\frac{\delta}{2r^2}d.sc = \frac{\delta}{2r}G - \frac{\delta ss}{r^3}G$; perciò sostituito questo valore in luogo del secondo termine della formola, che esprime la lunghezza del grado, essa si cangia in $G - \frac{ss\delta}{r^3}G - \frac{2\delta}{rr}d.sc$. È poi noto dalla natura delle quantità differenziali, che $d.sc = s'c' - sc$; sarà dunque la

lunghezza del grado $= G - \frac{Gss\delta}{r^2} + \frac{2cs\delta}{rr} - \frac{2c's'\delta}{rr}$, che è appunto l'espressione di Maupertuis, il quale a $\frac{G}{r}$ sostituisce nel secondo termine il suo uguale $\frac{g}{r}$. Il che era ec.

239. Qualora si abbia la misura di due gradi M, m del meridiano terrestre a diverse latitudini, i seni delle quali sieno rispettivamente S, s, e i coseni C, c si può sempre ritrovare il valore dell' ellitticità δ, il quale dà poscia la grandezza del grado, e del raggio della Sfera, la figura dell'Ellissoide Terrestre, e la lunghezza di tutti i suoi gradi. Abbiamo in fatti le due equazioni

$$G - \frac{g}{r}\cdot\frac{ss}{r^2}\delta + \frac{2cs}{rr}\delta - \frac{2c's'}{rr}\delta = m$$

$$G - \frac{g}{r}\cdot\frac{SS}{rr}\delta + \frac{2CS}{rr}\delta - \frac{2C'S'}{rr}\delta = M,$$

e sottratta la prima dalla seconda, ne risulta

$$\delta\left(\frac{g}{r}\cdot\frac{ss}{rr} - \frac{g}{r}\cdot\frac{SS}{rr} + \frac{2CS}{rr} - \frac{2cs}{rr} + \frac{2c's'}{rr} - \frac{2C'S'}{rr}\right)$$

$= M - m$, ed in fine

$$\delta = \frac{M - m}{\frac{g}{r}\cdot\frac{ss}{rr} - \frac{g}{r}\cdot\frac{SS}{rr} + \frac{2CS}{rr} - \frac{2cs}{rr} + \frac{2c's'}{rr} - \frac{2C'S'}{rr}}.$$

240. Si determina δ in altro modo facendo uso della formola del raggio osculatore; avvegnachè ciascun grado del meridiano dell' Ellissoide Terrestre non è altro che il grado del cerchio osculatore dell' Ellisse per la proposta latitudine. Quindi abbiamo le due analogie

$$r : g :: r - 2\delta + \frac{3ss}{rr}\delta : m,$$

$$r : g :: r - 2\delta + \frac{3SS}{rr}\delta : M;$$

e da queste le due equazioni

$$g - \frac{2g}{r}\delta + \frac{g}{r}\cdot\frac{3ss}{rr}\delta = m,$$

$$g - \frac{2g}{r}\delta + \frac{g}{r}\cdot\frac{3SS}{rr}\delta = M.$$

Sottratta la prima dalla seconda, e indi dividendo per $\frac{g}{r}\left(\frac{3SS}{rr} - \frac{3ss}{rr}\right)$ ritrovasi

$$\delta = \frac{M - m}{\frac{g}{r}\left(\frac{3SS}{rr} - \frac{3ss}{rr}\right)},$$

espressione più comoda e semplice della precedente.

241. Per ritrovare poi sull' Ellissoide il luogo preciso, dove il grado del meridiano è uguale al grado corrispondente del Globo, basta fare $G - \frac{2\delta G}{r} + \frac{3ss\delta G}{r^3} = G$, dalla qual equazione si deduce immantinente $\frac{s}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}} = sen.\ 55°$ di latitudine; il che dà a divedere, che il 55.mo grado di latitudine è di uguale lunghezza nell' Ellissoide della Terra, e nel Globo ad essa circoscritto.

242. Un celebre Geometra, che ha veduto questo mio picciolo scritto, dal valore dianzi trovato di $CT = SD = x = c + \frac{css\delta}{r^3}$ credeva di poter inferire, che conosciuta la misura d'un solo grado di longitudine in un parallelo, di cui è data la latitudine, si veniva subito in cognizione dell' ellitticità δ, perchè chiamata m la misura nota del grado di longitudine si ha tosto l' equazione

$$\frac{g}{r}\left(c + \frac{css\delta}{r^3}\right) = m, \text{ e quindi } \delta = \frac{m - \frac{g}{r}\cdot c}{\frac{css}{r^3}},$$

nel qual valore, per li dati del Problema, tutto pare essere determinato. Il paralogismo consiste

nel supporre nota la quantità $\frac{g}{r}.c$, nella quale è bensì noto il fattore $\frac{g}{r}$, che è in qualunque cerchio il rapporto dell' arco di un grado al suo raggio, ma è ignoto l' altro fattore c, perchè sebbene c sia il coseno d' una latitudine data è però un coseno preso nel supposto, che il seno tutto sia r, ovvero il semidiametro CE dell' equatore, il quale non può assumersi come conosciuto senza supporre ciò che è in quistione. Il coseno, che è noto della data latitudine, è quello che è espresso da $\frac{c}{r}$, il quale rappresenta il coseno dell' *angolo di latitudine*.

243. Per determinare l' ellitticità δ per mezzo de' gradi di longitudine, bisogna avere la misura di due di questi in due differenti latitudini; avvegnachè nominati questi M, m, e ritenute le precedenti denominazioni, si avranno le due equazioni

$$\frac{gC}{r} + \frac{g}{r}.\frac{CSS}{r^3}\delta = M,$$

$$\frac{g}{r}c + \frac{g}{r}.\frac{css}{r^3}\delta = m.$$

Moltiplico la seconda per $\frac{C}{r}$, e sottraendola dalla prima moltiplicata per $\frac{c}{r}$ ottengo $\frac{g}{r}.\frac{cCSS}{r^4}\delta - \frac{g}{r}.\frac{Ccss}{r^4}\delta = \frac{c}{r}M - \frac{C}{r}m$; e quindi

$$\delta = \frac{\frac{c}{r}.M - \frac{C}{r}.m}{\frac{g}{r}.\frac{cCSS}{r^4} - \frac{g}{r}.\frac{Ccss}{r^4}}.$$

244. Che se in vece di uno de' due gradi di longitudine sarà dato un grado del meridiano nel

luogo, dove esso taglia il parallelo, vale a dire sarà dato un grado d'un parallelo, e un altro del meridiano, ma entrambi alla stessa latitudine; allora chiamato p il grado del parallelo, m quello del meridiano, ci si offrono le due seguenri equazioni

$$\frac{g}{r}.c + \frac{g}{r}.\frac{css}{r^3}\delta = p,$$

$$g - \frac{2g}{r}\delta + \frac{g}{r}.\frac{3ss}{rr}\delta = m.$$

Sottraggo la prima dalla seconda moltiplicata per $\frac{c}{r}$, e ne ricavo $\frac{2g}{r}.\frac{css}{r^3}\delta - \frac{2g}{r}.\frac{c}{r}\delta = \frac{c}{r}m - p$; dal che ne viene

$$\delta = \frac{\frac{c}{r}m - p}{\frac{2g}{r}\left(\frac{css}{r^3} - \frac{c}{r}\right)} = \frac{p - \frac{c}{r}m}{\frac{2g}{r}.\frac{c^3}{r^3}}.$$

245. Se per ultimo sarà nota l'estensione del grado di un parallelo, e del grado del meridiano, ma a differenti latitudini; si trovano (essendo S, C il seno e coseno di latitudine pel grado m del meridiano) le due equazioni

$$\frac{g}{r}.c + \frac{g}{r}.\frac{css}{r^3}\delta = p,$$

$$g - \frac{2g}{r}\delta + \frac{3g}{r}.\frac{SS}{rr}.\delta = m.$$

Moltiplico la seconda per $\frac{c}{r}$, e sottraendola dalla prima, nasce

$$\frac{2g}{r}.\frac{c}{r}\delta + \frac{g}{r}.\frac{css}{r^3}\delta - \frac{3g}{r}.\frac{cSS}{r^3}\delta = p - \frac{c}{r}m, \text{ ovvero}$$

$$\frac{3g}{r}.\frac{c}{r}\delta - \frac{g}{r}.\frac{c^3}{r^3}\delta - \frac{3g}{r}.\frac{cSS}{r^3}\delta = p - \frac{c}{r}m, \text{ oppure}$$

$$\frac{3g}{r}\cdot\frac{cCC}{r^3}\delta - \frac{g}{r}\cdot\frac{c^3}{r^3}\delta = p - \frac{c}{r}m;$$

donde si ha in fine

$$\delta = \frac{p - \frac{c}{r}m}{\frac{g}{r}\left(\frac{3cCC}{r^3} - \frac{c^3}{r^3}\right)}.$$

FINE.

INDICE

DEGLI ARTICOLI.

F. I.

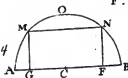


Fig. 4

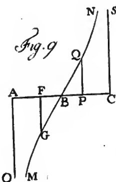


Fig. 9

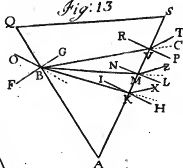


Fig: 13

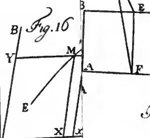


Fig. 16

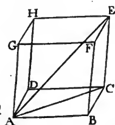
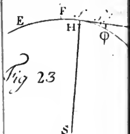
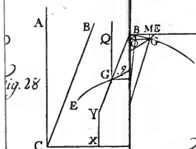
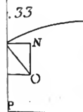


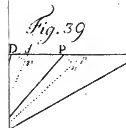
Fig. 21

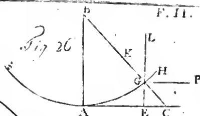


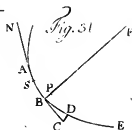

Fig. 23
E
F
H
φ
S

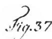

Fig. 28
A
B
Q
G
g
E
Y
X
C
B
ME
G

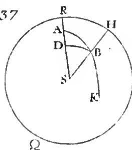

.33
N
O
P

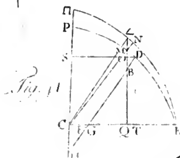

Fig. 39
D
P


F. II.
Fig. 26
L
K
G
H
P
A
E
C


Fig. 31
N
F
A
P
B
D
C
E


Fig. 3


Fig. 37
R
A
H
D
B
S
K
Q


Fig. 41
Π
P
N
S
D
B
C
G
Q
T
E






BIBLIOTECA